Les Annales RECITS (http://www.lrecits.usthb.dz)
Vol. 02, 2015, pages 7-13

Les suites quasi Morgan-Voyce comme convolutions itérées de suites de Pell généralisées

Lyes Ait Amrane*, et Hacène Belbachir*****

* USTHB/Faculty of Mathematics, LATN Laboratory, DG-RSDT
BP 32, El Alia, 16111, Bab Ezzouar, Algiers
ALGERIA
** Ecole nationale Supérieure d'Informatique (ESI)
BP 68M Oued Smar, 16270, El Harrach, Algiers
ALGERIA
*** USTHB/Faculty of Mathematics, RECITS Laboratory, DG-RSDT
BP 32, El Alia, 16111, Bab Ezzouar, Algiers
ALGERIA

l_ait_amrane@esi.dz, lyesait@gmail.com
hbelbachir@usthb.dz, hacenebelbachir@gmail.com

Abstract: We show that the coefficients of the general term of the quasi Morgan-Voyce sequence, expressed as a polynomial in t, are a convolution of generalized Pell sequences.

Keywords: Quasi Morgan-Voyce sequences, Pell sequences and convolution.

Résumé : Nous montrons que si l'on exprime le terme général de la suite quasi Morgan-Voyce comme polynôme en t, alors ses coefficients sont un produit de convolutions de suites de Pell généralisées.

Mots clés : Suites quasi Morgan-Voyce, suites de Pell et produit de convolution.

1 Introduction

Horadam [2] a introduit la *suite quasi Morgan-Voyce* définie par

$$\begin{cases} Q_1^{(s)} = 1, \quad Q_2^{(s)} = 1 + t + s, \\ Q_n^{(s)} = (2+t)Q_{n-1}^{(s)} + Q_{n-2}^{(s)}, \qquad (n \geq 3). \end{cases} \tag{1}$$

Si nous écrivons $Q_{n+1}^{(s)} = \sum_{k=0}^{n} Q^{(s)}(n,k)t^k$ pour $n \geq 0$, alors, dans un premier temps, nous montrons que les coefficients $Q^{(1)}(n,k)$ sont des produits de convolution de la suite de Pell $(P_n)_n$, définie ci-dessous, avec elle même. Ensuite, nous montrons que les coefficients $Q^{(s)}(n,k)$ sont des produits de convolutions de suites de Pell généralisés.

2 Cas $s = 1$

On commence par le cas $s = 1$. Dans ce cas, notre suite est donnée par

$$\begin{cases} Q_1^{(1)} = 1, \quad Q_2^{(1)} = 2 + t, \\ Q_n^{(1)} = (2+t)Q_{n-1}^{(1)} + Q_{n-2}^{(1)}, \qquad (n \geq 3). \end{cases} \tag{2}$$

On va montrer que les coefficients $Q^{(1)}(n,k)$ sont exactement les lignes du triangle de convolution de la suite de Pell donné ci-dessous, ce triangle correspond à A054456 dans [3]. On rappelle que la suite de Pell $(P_n)_n$ est définie par

$$\begin{cases} P_1 = 1, \ P_2 = 2, \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad (n \geq 3). \end{cases} \tag{3}$$

Le triangle de convolution des suites de Pell est défini comme suit : la première colonne est constituée des nombres de Pell, la deuxième colonne est constituée de la convolution de la colonne des nombres de Pell avec elle-même, la troisième colonne est constituée de la colonne des nombres de Pell convolée deux fois avec elle-même et ainsi de suite. Les 0 dans le Tableau 1 sont représentés par un vide.

Si on note par $D(n,k)$ les éléments de ce triangle, alors on a

$$D(n,k) = 0, \qquad (n < k), \tag{4}$$

$$D(n,n) = 1 \qquad (n \geq 0), \tag{5}$$

$$D(n,0) = P_{n+1}, \qquad (n \geq 0), \tag{6}$$

et pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$

$$D(n,k) = \sum_{i=0}^{n-1} D(i,j)D(n-1-i, k-1-j), \qquad (k, n \geq 1). \tag{7}$$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	1										
1	2	1									
2	5	4	1								
3	12	14	6	1							
4	29	44	27	8	1						
5	70	131	104	44	10	1					
6	169	376	366	200	65	12	1				
7	408	1052	1212	810	340	90	14	1			
8	985	2888	3842	3032	1555	532	119	16	1		
9	2378	7813	11784	10716	6482	2709	784	152	18	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\ddots$

TABLE 1 – Triangle de convolution de la suite de Pell.

Lemme 1 *Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$ des entiers, alors on a*

$$D(n+1,k) = D(n,k-1) + 2D(n,k) + D(n-1,k). \tag{8}$$

Preuve. Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$ des entiers, alors

$$\begin{aligned}
D(n+1,k) &= \sum_{i=0}^{n} D(i,k-1)D(n-i,0) \\
&= D(n,k-1)D(0,0) + D(n-1,k-1)D(1,0) + \sum_{i=0}^{n-2} D(i,k-1)D(n-i,0) \\
&= D(n,k-1) + 2D(n-1,k-1) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} D(i,k-1)\left[2D(n-1-i,0) + D(n-2-i,0)\right] \\
&= D(n,k-1) + 2D(n-1,k-1) + 2\sum_{i=0}^{n-2} D(i,k-1)D(n-1-i,0) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} D(i,k-1)D(n-2-i,0) \\
&= D(n,k-1) + 2\sum_{i=0}^{n-1} D(i,k-1)D(n-1-i,0) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} D(i,k-1)D(n-2-i,0) \\
&= D(n,k-1) + 2D(n,k) + D(n-1,k).
\end{aligned}$$

■

Théoreme 2 *Le terme général de la suite $\left(Q_n^{(1)}\right)_n$ est*

$$Q_{n+1}^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} D(n,k)t^k, \qquad (n \geq 0). \tag{9}$$

Preuve. Par récurrence sur n. Pour $n = 0$ et 1, l'identité (9) est facile à vérifiée. Supposons que (9) est vraie jusqu'à l'ordre n, alors

$$\begin{aligned}
Q_{n+2}^{(1)} &= (2+t)Q_{n+1}^{(1)} + Q_n^{(1)} \\
&= (2+t)\sum_{k=0}^{n} D(n,k)t^k + \sum_{k=0}^{n-1} D(n-1,k)t^k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} D(n,k)t^k + \sum_{k=0}^{n} D(n,k)t^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} D(n-1,k)t^k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} D(n,k)t^k + \sum_{k=1}^{n+1} D(n,k-1)t^k + \sum_{k=0}^{n-1} D(n-1,k)t^k \\
&= 2D(n,0) + \sum_{k=1}^{n-1} 2D(n,k)t^k + 2D(n,n)t^n + \sum_{k=1}^{n-1} D(n,k-1)t^k \\
&\quad + D(n,n-1)t^n + D(n,n)t^{n+1} + D(n-1,0) + \sum_{k=1}^{n-1} D(n-1,k)t^k \\
&= [2D(n,0) + D(n-1,0)] + \sum_{k=1}^{n-1} [D(n,k-1) + 2D(n,k) + D(n-1,k)]\, t^k \\
&\quad + [2D(n,n) + D(n,n-1)]\, t^n + D(n,n)t^{n+1},
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 1 et les relations (4), (5), (6) et (8) on obtient

$$\begin{aligned}
Q_{n+2}^{(1)} &= D(n+1,0) + \sum_{k=1}^{n-1} D(n+1,k)t^k + D(n+1,n)t^n + D(n+1,n+1)t^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} D(n+1,k)t^k.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3 *Avec les mêmes notations que précédemment, on a*

$$D(n,k) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} \binom{n-j}{j}\binom{n-2j}{k} 2^{n-2j-k}, \qquad 0 \le k \le n. \tag{10}$$

Preuve. D'après [1, Corollaire 1], on a

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1}^{(1)} &= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n-j}{j}(2+t)^{n-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \left(\binom{n-j}{j} \sum_{k=0}^{n-2j} \binom{n-2j}{k} 2^{n-2j-k} t^k \right) \\
&= \sum_{\substack{j,k \\ 0\le k\le n-2j\le n}} \binom{n-j}{j}\binom{n-2j}{k} 2^{n-2j-k} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor (n-k)/2\rfloor} \binom{n-j}{j}\binom{n-2j}{k} 2^{n-2j-k} \right) t^k,
\end{aligned}
$$

et le résultat découle en identifiant cela avec (9). ■

3 Cas s entier quelconque

Nous traitons maintenant le cas général (s entier quelconque). Supposons donc que notre suite quasi Morgan-Voyce est donnée par (1) et soit $(G_n)_n$ la suite de Pell avec des conditions initiales généralisées, donnée par

$$
\begin{cases} G_1 = 1, \quad G_2 = 1+s, \\ G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}, \qquad (n \geq 3). \end{cases} \tag{11}
$$

On définit le triangle de convolution des suites de Pell généralisées comme suit : la première colonne est constituée des nombres de Pell avec les conditions initiales 1 et $1+s$, la deuxième colonne est constituée de la convolution de la suite $(G_n)_n$ avec la suite $(P_n)_n$, la troisième colonne est constituée de la suite $(G_n)_n$ convolée deux fois avec la suite $(P_n)_n$ et ainsi de suite. C'est-à-dire, chaque colonne est la convolution de la colonne précédente avec la suite $(P_n)_n$. On va montrer que les coefficients $Q^{(s)}(n,k)$ sont exactement les lignes du triangle de convolution des suites de Pell généralisées donné ci-dessous.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
0	1							
1	$1+s$	1						
2	$3+2s$	$3+s$	1					
3	$7+5s$	$10+4s$	$5+s$	1				
4	$17+12s$	$30+14s$	$21+6s$	$7+s$	1			
5	$41+29s$	$87+44s$	$77+27s$	$36+8s$	$9+s$	1		
6	$99+70s$	$245+131s$	$262+104s$	$156+44s$	$55+10s$	$11+s$	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Table 2 – Triangle de convolution des suites de Pell généralisées.

Si on note par $B(n,k)$ les éléments de ce triangle, alors on a

$$
B(n,k) = 0, \qquad (n < k), \tag{12}
$$

$$B(n,n) = 1 \qquad (n \geq 0), \tag{13}$$

$$B(n,0) = G_{n+1}, \qquad (n \geq 0), \tag{14}$$

et pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$

$$B(n,k) = \sum_{i=0}^{n-1} D(i,j) B(n-1-i, k-1-j), \qquad (k, n \geq 1). \tag{15}$$

Lemme 4 *Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$ des entiers, alors on a*

$$B(n+1,k) = B(n,k-1) + 2B(n,k) + B(n-1,k). \tag{16}$$

Preuve. Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$ des entiers, alors

$$\begin{aligned}
D(n+1,k) &= \sum_{i=0}^{n} D(i,0) B(n-i,k-1) \\
&= D(0,0)B(n,k-1) + D(1,0)B(n-1,k-1) + \sum_{i=2}^{n} D(i,0)B(n-i,k-1) \\
&= B(n,k-1) + 2B(n-1,k-1) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} \left[2D(i-1,0) + D(i-2,0)\right] B(n-i,k-1) \\
&= B(n,k-1) + 2B(n-1,k-1) + 2\sum_{i=2}^{n} D(i-1,0)B(n-i,k-1) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} D(i-2,0)B(n-i,k-1) \\
&= B(n,k-1) + 2\sum_{i=1}^{n} D(i-1,0)B(n-i,k-1) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} D(i-2,0)B(n-i,k-1) \\
&= B(n,k-1) + 2\sum_{i=0}^{n-1} D(i,0)B(n-1-i,k-1) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} D(i,0)B(n-2-i,k-1) \\
&= B(n,k-1) + 2B(n,k) + B(n-1,k).
\end{aligned}$$

■

Théoreme 5 *Le terme général de la suite $\left(Q_n^{(s)}\right)_n$ est*

$$Q_{n+1}^{(s)} = \sum_{k=0}^{n} B(n,k) t^k, \qquad (n \geq 0). \tag{17}$$

Preuve. Par récurrence sur n. Pour $n = 0$ et 1, l'identité (17) est facile à vérifiée. Supposons que (17) est vraie jusqu'à l'ordre n, alors

$$\begin{aligned}
Q_{n+2}^{(s)} &= (2+t)Q_{n+1}^{(s)} + Q_n^{(s)} \\
&= (2+t)\sum_{k=0}^{n} B(n,k)t^k + \sum_{k=0}^{n-1} B(n-1,k)t^k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} B(n,k)t^k + \sum_{k=0}^{n} B(n,k)t^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} B(n-1,k)t^k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} B(n,k)t^k + \sum_{k=1}^{n+1} B(n,k-1)t^k + \sum_{k=0}^{n-1} B(n-1,k)t^k \\
&= 2B(n,0) + \sum_{k=1}^{n-1} 2B(n,k)t^k + 2B(n,n)t^n + \sum_{k=1}^{n-1} B(n,k-1)t^k \\
&\quad + B(n,n-1)t^n + B(n,n)t^{n+1} + B(n-1,0) + \sum_{k=1}^{n-1} B(n-1,k)t^k \\
&= [2B(n,0) + B(n-1,0)] + \sum_{k=1}^{n-1} [B(n,k-1) + 2B(n,k) + B(n-1,k)]\, t^k \\
&\quad + [2B(n,n) + B(n,n-1)]\, t^n + B(n,n)t^{n+1},
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 4 et les relations (12), (13), (14) et (15) on obtient

$$\begin{aligned}
Q_{n+2}^{(S)} &= B(n+1,0) + \sum_{k=1}^{n-1} B(n+1,k)t^k + B(n+1,n)t^n + B(n+1,n+1)t^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} B(n+1,k)t^k.
\end{aligned}$$

■

Références

[1] H. Belbachir et F. Bencherif. *Linear recurrence sequences and powers of a square matrix*, Integers **6** (2006), A12, 17 pp.

[2] A. F. Horadam. *Quasi Morgan-Voyce polynomials and Pell convolutions*, Applications of Fibonacci numbers, Vol. 8, (Rochester, NY, 1998), 179–193, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[3] N. J. A. Sloane. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* Published electronically at http ://www.oeis.org, 2014.