Les Annales RECITS (http://www.lrecits.usthb.dz)
Vol. 3, 2016, pages 1-12

Méthodes Exactes pour l'Optimisation Discrète à Objectifs Multiples. Cas linéaire et hyperbolique

ZERFA Lamia et CHERGUI Mohamed El-Amine

Laboratoire RECITS, Faculté de Mathématiques,
USTHB BP 32, BEZ, Alger, Algerie

zerfa-lamia@hotmail.fr, mchergui@usthb.dz

Abstract: Most real life problems encountered in practice require the simultaneous optimization of multiple, often conflicting, objectives. For such problems, the concept of optimality is replaced with that of efficiency. In this document, we were interested on Discrete Multiobjective Optimization. An exacte methode of resolution of the linear problem with multiobjectives and real coefficients in integer variables named $Z\epsilon$ is developed. We also tackled the study of the problem of the integer linear fractional programming $(MOILFP)$, and we succeeded in generalizing the method $Z\epsilon$ to the $(MOILFP)$ problem.

Keywords: Integer linear programming, multiobjective optimization, non dominated solution, linear fractional programming

Résumé : Les problèmes réels rencontrés en pratique requirent souvent l'optimisation simultanée de plusieurs objectifs conflictuels. La notion d'optimalité disparaît pour les problèmes de ce type au profit de la notion d'efficacité. Résoudre un problème d'optimisation multi-objectif, c'est determiner complètement ou partiellement l'ensemble des solutions non dominées. Dans ce document, nous nous sommes intéressés à l'optimisation multi-objectif discrète. Une méthode exacte de résolution du problème linéaire à objectifs multiples et coefficients réels en variables entière nommée $Z\epsilon$ est mise au point. Nous avons aussi abordé l'étude du problème de la programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers $(MOILFP)$, et nous avons réussi à généraliser la méthode $Z\epsilon$ au problème $(MOILFP)$.

Mots clés : Optimisation linéaire discrète, programmation multi-objectif, solution non dominée, optimisation linéaire fractionnaire.

1 Introduction

L'optimisation combinatoire consiste à trouver parmi un ensemble discret de solutions respectant des contraintes une solution qui optimise une fonction objectif. Par optimiser, on entend trouver la plus petite valeur (problème de minimisation) ou la plus grande valeur (problème de maximisation)de la fonction.

Dans ce document, on s'intéresse particulièrement aux problèmes d'optimisation combinatoires qui comportent plusieurs objectifs. On parle alors d'optimisation combinatoire multi-objectif. Ce domaine possède ses sources dans les travaux de Edgeworth [6] et de Pareto [17] dans le cadre d'études d'économie au 19 ème siècle. Cependant, l'optimisation multi-objectif connaît un intérêt croissant depuis le milieu des années 1980 [9] et le domaine connaît une expansion importante depuis le milieu des années 1990 avec l'apparition de méthodes évolutionnaires pour l'optimisation multi-objectif [4]. Actuellement, l'optimisation multi-objectif est appliquée dans de nombreux domaines académiques et industriels.

De manière formelle, un problème d'optimisation multi-objectif est un problème de la forme $max f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))$ tel que x soit une solution réalisable. La solution d'un problème multi-objectif n'est pas une unique solution mais un ensemble de solutions appelé ensemble non-dominé. Les composantes du vecteur f sont les différentes fonctions à optimiser. Les solutions non dominées sont celles pour lesquelles l'amélioration d'un des objectifs entraîne systématiquement la détérioration de la qualité d'au moins un autre objectif. La présence d'objectifs contradictoires apporte de nouveaux défis à relever pour les méthodes d'optimisation classique.

Nous proposons dans ce document, une méthode exacte $Z\epsilon$, pour la détermination de toutes les solutions non dominées du problème multi-objectif linéaire discrète($MOILP$) dans le cas où les coefficients des variables dans les vecteurs $f_i(x)$ ne sont pas restreints aux valeurs entières. Une généralisation de la méthode $Z\epsilon$ est aussi conçue au problème multi-objectif fractionnaire linéaire discrète ($MOILFP$).

2 Programmation multi-objectif linéaire discrète

Un problème d'optimisation mono-objectif peut être formulé comme suit :

$$(PL)\begin{cases} optimiser & z(x) \\ sous & x \in S \end{cases} \tag{1}$$

où x est un vecteur de n variables, z est une fonction scalaire et S l'ensemble des contraintes défini comme suit : $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$, A est une $m \times n$-matrice réelle et b un m-vecteur réel.

Un problème de programmation linéaire en nombres entiers $PLNE$ n'est pas un programme linéaire dans le sens où son domaine de réalisabilité n'est pas un polyèdre mais un ensemble discret de points. Pourtant,on peut le décrire comme un PL auquel on ajoute la contrainte supplémentaire que certaines variables ne peuvent prendre que des valeurs entières.On obtient dans ce cas, le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$(PLNE)\begin{cases} optimiser \quad z(x) \\ x \in S \\ x \quad \text{vecteur entier} \end{cases} \tag{2}$$

L'ensemble S n'est autre que le domaine des solutions réalisables du programme linéaire relaxé (PL) obtenu en relâchant les contraintes d'intégrité des variables.

Un problème d'optimisation multi-objectif est un problème d'optimisation pour lequel $k(k > 1)$ fonctions objectifs à optimiser (minimiser ou maximiser).Il se définit de la façon suivante :

$$(P)\begin{cases} Max \quad z(x) = (z_1(x), z_2(x), ..., z_k(x)) \\ sous \quad x \in S \end{cases} \tag{3}$$

où $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ est l'ensemble des solutions réalisables de (P) (appelée aussi espace de décision) définies ci-dessus. A chaque solution réalisable x dans S, on associe son image $z(x) = (z_1(x), z_2(x), ..., z_k(x))$ dans $\mathbb{R}^k$ (espace des critères) et on construit donc, l'ensemble $C = \{y \in \mathbb{R}^n : y = z(x), x \in S\} = z(S)$.

Sans perte de généralité nous supposerons par la suite que nous considérons des problèmes de maximisation.

2.1 Concepts de base

Une différence fondamentale entre l'optimisation mono-objectif et l'optimisation multi-objectif repose sur le fait que pour la plupart des problèmes multi-objectif, les critères étant antagonistes, il n'existe pas de solution réalisable qui maximise tous les objectifs simultanément. Par conséquent, il n'existe plus de relation d'ordre total entre solutions. Celles-ci doivent être comparées par la relation de dominance de Pareto qui repose sur la définition suivante :

Définition 1 *On dit qu'un vecteur* $z = (z_1, z_2, ..., z_k)$ *domine un vecteur* $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, *si* $\forall i = 1...k$, $z_i \geq y_i$ *et* $\exists i \in \{1...k\}$ *tel que* $z_i > y_i$.

Définition 2 *Une solution réalisable $x^* \in S$ est efficiente (ou efficace) si'il n'existe pas une autre solution $x \in S$ telle que $z(x)$ domine $z(x^*)$.*

Définition 3 *Soit $\overline{x} \in S$ et $C^{\geq}$ le cone semi-polaire positif généré par les gradients des k fonctions objectifs où $C^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \geq 0, Cx \neq 0\} \cup \{0 \in \mathbb{R}^n\}$. L'ensemble de dominance sur $\overline{x}$ est donné par : $D_{\overline{x}} = \{\overline{x}\} \cup C^{\geq} = \{\overline{x} + x \mid x \in C^{\geq}\}$.*

Définition 4 *Soit $D_{\overline{x}}$ l'ensemble dominant en $\overline{x} \in S$. Alors, $\overline{x}$ est efficaces si et seulement si $D_{\overline{x}} \cap S = \{\overline{x}\}$.*

Corollaire 1 *Si $C^{\geq} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, alors $\forall x \in S$, x est solution efficace.*

2.2 Caractérisation d'une solution efficace[3]

Le théorème de Benson [3] permet de tester l'efficacité d'une solution réalisable d'un problème d'optimisation multi-objectif.

L'idée est de choisir une solution réalisable initiale $x^* \in S$ et, si la solution elle même n'est pas efficace, produire une solution réalisable x telle que $z(x)$ domine $z(x^*)$.

Considérons le problème (PE) suivant :

$$(PE) \begin{cases} max\varphi = \sum_{i=1}^{k} v_i \\ z_i(x) - z_i(x^*) - v_i = 0, i = 1, ..., k\,; \\ x \in S \\ v_i \geq 0, i = 1, ..., k. \end{cases} \tag{4}$$

Théoreme 2 *Soit x^* une solution réalisable pour le problème (P). x^* est une solution efficace pour le problème (P) si et seulement si la valeur optimale de la fonction objectif φ est nulle dans le programme linéaire (PE).*

Proposition 3 *Si le problème (PE) a une solution optimal $(\hat{x}, \hat{v})$ (et la valeur optimale de la fonction objectif est finie) alors $\hat{x}$ est efficace.*

La résolution d'un problème multi-objectif consiste à déterminer soit l'ensemble des solutions efficaces dans l'espace des décisions noté Eff, soit l'ensemble des solutions non dominées dans l'espace des critères noté SND. Dans la littérature, plusieurs approches de résolution du problème de la programmation multi-objectif sont considérées. Dans les méthodes d'optimisation à priori, on fixe à l'avance un compromis entre les objectifs. Les méthodes interactives font intervenir le décideur dans le processus de recherche de solutions en répondant à différentes questions afin d'orienter la recherche. Les méthodes d'optimisation à posteriori cherchent soit l'ensemble complet ou partiel des solutions de bon compromis (efficaces ou non dominées) par des méthodes exactes, soit un ensemble de bonnes solutions approchées, bien réparties et non dominées entre elles. La solution appropriée est alors sélectionnée par le décideur parmi les solutions trouvées.

3 Génération des solutions non dominées pour le problème multi-objectif linéaire discret

Dans notre travail, nous nous sommes penchés sur la programmation linéaire multi-objectif discrète, une méthode exacte est proposée dans le cas où les vecteurs coûts ne sont pas forcément des entiers naturels.

Soit le programme suivant :

$$(P) \begin{cases} max \quad z(x) = (c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ sous \quad x \in S \\ x \quad \text{vecteur entier} \end{cases} \tag{5}$$

où c_j est un vecteur réel pour $j = 1, ..., k$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ est le domaine des solutions réalisable du problème (P) , $A \in \mathbb{Z}^{n+m}$ et $b \in \mathbb{Z}^m$.

3.1 Principe de la méthode

L'approche proposée $Z\epsilon$ génère toutes les solutions entières non dominées, qui consiste à optimiser le problème sur la somme des objectifs du programme (P). Si la solution optimale obtenue n'est pas entière, seul un processus de branchement est effectué pour détecter une solution entière. Quand une solution entière x_0 est obtenue, le vecteur critère correspondant est comparé à ceux déjà trouvés, si cette solution est incomparable, un test d'efficacité est alors, effectué sur cette solution. Si la solution x_0 est efficace, on rajoute des coupes pour supprimer cette solution et les solutions entières dominées par $z(x_0)$ contenues dans l'ensemble des solutions réalisables courant. Pour ce faire, des sous-problèmes $(P_1), (P_2), ..., (P_k)$ sont créés à partir de (P) après avoir rajouter les contraintes sur les valeurs des objectifs en x_0 de la forme $z_j(x) \geq z_j(x_0) + \epsilon_j, \forall j = 1, ..., k$, ϵ_j représente une valeur positive plus petite que l'erreur qu'on accepte sur l'objectif. Si x_0 n'est pas efficace, le test d'efficacité de Benson [3] donne une solution efficace y. Dans ce cas, les problèmes (P_j), $j = 1, ..., k$ sont créés par adjonction des contraintes $z_j(x) \geq z_j(y) + \epsilon_j, \forall j = 1, ..., k$.

Algorithme 1

$l := 0, Eff := \varnothing, SND := \varnothing$

Tant que l'arborescence contient, des nœuds non sondé, faire :

Etape l *: Résoudre le programme linéaire* (P_l)

1. *si* (P_l) *est non réalisable, alors le nœud* l *est sondé.*
2. *sinon, soit* x^l *la solution optimale de* (P_l).
3. *si* x^l *n'est pas entière, aller à l'étape* $l1$.
4. *sinon, aller à l'étape* $l2$.

Etape l1 *: séparer par rapport à une variable* x_j^l *non entière, deux nouveaux noeuds sont créés* $x_j \leq \lfloor x_j^l \rfloor$ *et* $x_j \geq \lceil x_j^l \rceil$ $, l := l + 2$.

Etape l2 *:*

1. *si* $z(x^l)$ *est dominé par* $z(y)$ *pour une solution* $y \in Eff$, *aller à Etape* $l3$.
2. *sinon résoudre le programme linéaire* (PE) *:*
   (a) *si* $\varphi = 0$, *alors* x^l *est efficace,* $Eff := Eff \cup \{x^l\}$, $SND := SND \cup \{z(x^l)\}$ *et poser* $y = x^l$, *aller à Etape* $l3$.
   (b) *sinon, une solution efficace* y *trouvée par le programme* (PE) *qui est déjà résolu,* $Eff := Eff \cup \{y\}$, $SND := SND \cup \{z(y)\}$, *aller à l'Etape* $l3$.

Etape l3 *:* k *nouveaux nœuds sont créés en ajoutant la contrainte* $z_j(x) \geq z_j(y) + \epsilon_j$, $l := l + k$.

4 Programmation fractionnaire linéaire multi-objectif

Les programmes fractionnaires [8] consistent à optimiser un objectif mis sous la forme d'un rapport de deux fonctions linéaires ou non, soumis à un ensemble de contraintes. Différentes versions de ce modèle, linéaires ou non linéaires, en nombres entiers ou en continu, ont une multitude d'applications que ce soit en optimisation combinatoire, en programmation stochastique, en bases de données ou en économie [10],[11],[12],[13],[14],[15],[16]. La programmation fractionnaire linéaire se réfère au même type de problèmes d'optimisation mais où le numérateur et le dénominateur sont des fonctions affines, et le domaine des solutions réalisables est un polyèdre convexe.

4.1 Notations et définitions

Étant donnée f, h et $g_i, i = 1, ..., m$,des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^n$, avec h ne s'annulant pas sur un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$,le problème de programmation fractionnaire consiste à déterminer un élément x^* de X optimisant la fonction $f(x)/g(x)$ sur un domaine défini par le système de contraintes $g(x) \leq 0$ avec x dans l'ensemble X. Il a donc la forme suivante :

$$(PF) \begin{cases} maximiser & \dfrac{f(x)}{h(x)} \\ g(x) \leq 0 \\ x \in X \end{cases} \tag{6}$$

et doit vérifier les hypothèses classiques suivantes :
– L'ensemble des solutions réalisables de (PF) est non vide,
– les fonctions f, h et g sont continues sur $\mathbb{R}^n$,
– $\forall x \in X : h(x) > 0$.
Le programme (PF) est dit fractionnaire linéaire, ou encore hyperbolique, lorsque f, h et g sont des fonctions linéaires ou affines de la variable x. Il se modélise alors comme suit :

$$(PF) \begin{cases} maximiser & \dfrac{cx + \alpha}{dx + \beta} \\ Ax \leq b \\ x \in X \end{cases} \tag{7}$$

où α et β sont des réels, c et d sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, A est une matrice réelle de format $m \times n$ et b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Selon Steuer, les programmes fractionnaires linéaires présentent l'intérêt particulier d'avoir pour leurs fonctions objectifs des courbes de niveaux linéaires. Pour illustrer cette propriété, considérons une $\overline{z}-$courbe niveau quelconque de la fonction objectif :

$$\overline{z} = \frac{cx + \alpha}{dx + \beta} \Leftrightarrow (c - \overline{z}d)x = \overline{z}\beta - \alpha \tag{8}$$

$\overline{z}-$ étant quelconque, il est donc clair que chaque courbe de niveau est une expression linéaire sur l'ensemble des solutions réalisable, respectant la contrainte de positivité stricte du dénominateur.

Si un programme fractionnaire linéaire possède une solution optimale, il existera donc au moins un point extrême optimal de S.

Théoreme 4 [7] *La solution optimale d'un programme fractionnaire linéaire est représentée par l'un des sommets extrêmes du domaine admissible.*

Malgré la linéarité des courbes de niveaux de la fonction objectif, lorsque $c \neq 0$, $d \neq 0$ et $c \neq wd$ pour tout $w \in \mathbb{R}$, les courbes de niveaux ne sont pas parallèles comme dans le cas de la programmation linéaire.

Le problème de la programmation multi-objectif discrète fractionnaire $(MOILFP)$ peut être formulé comme suit :

$$(MOILFP) \begin{cases} maxZ_1 = & \dfrac{c^1x+\alpha^1}{d^1x+\beta^1} \\ maxZ_2 = & \dfrac{c^2x+\alpha^2}{d^2x+\beta^2} \\ \vdots & \\ maxZ_k = & \dfrac{c^kx+\alpha^k}{d^kx+\beta^k} \\ Ax \leq b & \\ x \in \mathbb{N}^n & \end{cases} \tag{9}$$

où $k \geq 2$; c^i, d^i sont des $1 \times n$-vecteurs ; α^i, β^i sont des scalaires pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$; A est une $m \times n$-matrice réelle et $b \in \mathbb{R}^m$.

Notons que la programmation fractionnaire linéaire peut être aussi étendue aux problèmes de la programmation fractionnaire linéaire multi-objectif. Une recherche bibliographique nous a permis de constater qu'il y a peu de travaux traitant ce problème en variables continues et moins encore pour le cas où les variables sont entières. Nous citons pour ce dernier problème, la méthode décrite dans [1] par M. Abbas et M. Moulaî, la méthode de Chergui et Moulaî [5], La méthode de M. Ait Mehdi, M. Chergui et M. Abbas [2].

5 Génération des solutions non dominées pour le problème multi-objectif linéaire fractionnaire discret

Comme pour le problème de programmation multi-objectif linéaire ,la résolution du problème multi-objectif linéaire fractionnaire à variables entières $MOILFP$ est de trouver toutes les solutions efficaces au sens de la définition suivante :

Définition 5 *Un point $x^* \in S$ est efficace pour $MOILFP$ si et seulement si il n'existe pas un autre point $y \in S$ tel que $f(x^*) \geq f(y)$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ et $f_i(x^*) > f_i(y)$ pour au moins un $i \in \{1, ..., k\}$.*

Théoreme 5 *Soit x^* une solution réalisable donnée, et soit Le programme mono-objectif linéaire suivant :*

$$(PEF)\begin{cases} max\psi = \sum_{i=1}^{k} w_i \\ x \in S \\ (C^i - f_i^* D^i)x - w_i = f_i^* \beta^i - \alpha^i & i \in \{1, ..., k\} \\ w_i \geq 0 & i \in \{1, ..., k\} \end{cases} \tag{10}$$

tel que : $f_i^* = \dfrac{C^i x^* + \alpha^i}{D^i x^* + \beta^i}$

Le vecteur x^* est efficace pour $(MOILFP)$ si et seulement si la valeur optimale de la fonction objectif ψ est nulle dans le problème linéaire (PEF)

Proposition 6 *Si le problème (PEF) a une solution optimale $(\hat{x}, \hat{w})$ (et la valeur objectif optimale est finie) alors $\hat{x}$ est efficace.*

Soit x^* une solution efficace du problème $(MOILFP)$, On définit la coupe suivante :

$$\frac{C^i x + \alpha^i}{D^i x + \beta^i} \geq \frac{C^i x * + \alpha^i}{D^i x^* + \beta^i} + \epsilon, i \in \{1, ..., k\} \tag{11}$$

où ϵ est une valeur plus petite que l'erreur qu'on accepte sur les valeurs des $z_i(x)$.

posons : $l^i = \dfrac{C^i x^* + \alpha^i}{D^i x^* + \beta^i} + \epsilon$

$(11) \Longleftrightarrow \dfrac{C^i x + \alpha^i}{D^i x + \beta^i} \geq l^i \Longleftrightarrow C^i x + \alpha^i \geq l^i (D^i x + \beta^i)$

Alors,la coupe (11) devient :

$$(C^i - l^i D^i)x \geq l^i \beta^i - \alpha^i, \forall j \in \{1, ..., k\} \tag{12}$$

5.1 Développement de la méthode

La méthode est décrite pour résoudre le problème multi-objectif linéaire fractionnaire dans l'espace des critères. Elle repose sur le principe de la méthode multi-objectif linéaire citée précédemment. L'algorithme proposé consiste à réaliser les étapes suivantes :

Algorithme 2

Initialisation

$Eff = \varnothing$,$SND = \varnothing$, $l = 0$.

Soit le programme linéaire mono-objectif suivant :

$$(P_l)\begin{cases} max c^1 x \\ x \in S \end{cases}$$

***Étape** l*

Tant qu'il existe un nœud non sondé dans l'arborescence faire :

1. *Résoudre le programme (P_l).*
2. *Si (P_l) est irréalisable, alors le nœud l est sondé.*
3. *Sinon, soit x_l^* la solution optimale obtenue.*
   (a) *Si x_l^* n'est pas entière aller à l'étape $l1$.*
   (b) *Sinon, aller à l'étape $l2$.*

***Étape** $l1$*

Soit x_j^* une cordonnée fractionnaire de x_l^*. Séparer le nœud l en deux nouveaux nœuds : $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ et $x_j \leq \lceil x_j^* \rceil$. $l := l + 2$, aller à l'étape l

***Étape** $l2$*

1. *Si $z(x_l^*) = z(y)$ pour une solution $y \in Eff$, alors x_l^* est une solution efficace et aller à l'étape $l3$*
2. *Si $z(x_l^*) < z(y)$ pour une solution $y \in Eff$, alors $z(y)$ domine $z(x_l^*)$, poser $x_l^* = y$ et aller à l'étape $l3$*
3. *Si pour toute solution $y \in Eff$, $z(x_l^*)$ n'est pas dominé par $z(y)$, alors résoudre le programme linéaire mono-objectif (PFE)*
   (a) *Si $\psi = 0$, alors x_l^* est efficace, $Eff = Eff \cup \{x_l^*\}$, $SND = SND \cup \{z(x_l^*)\}$, aller à l'étape $l3$.*
   (b) *Sinon x_l^* est non efficace, la résolution du programme (PFE) donne une solution y efficace, $x_l^* = y$, aller à l'étape $l3$.*

***Étape** $l3$*

Des problèmes $(P_1^{l+1}), (P_2^{l+1}), ..., (P_k^{l+1})$ sont crées à partir de (P_l) en lui ajoutant les contraintes (12).

$l := l + k$.

6 Conclusion

Résoudre un problème d'optimisation multi-objectif, c'est determiner complètement ou partiellement l'ensemble des solutions non dominées.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux problèmes de programmation linéaire multi-objectif et fractionnaire en nombres entiers pour lesquels relativement peu de travaux ont été réalisés. On a présenté quelques définitions et concept de base de la programmation linéaire et fractionnaire mono-objectif, puis, les concepts de l'optimisation multi-objectif et multi-objectif fractionnaire qui ont fait l'objet du noyau central de cette thèse. Une étude bibliographique des méthodes de résolution de problème multi-objectif est menée. Une méthode exacte, $Z\epsilon$, de résolution du problème linéaire à objectifs multiples et coefficients réels en variables entière est mise au point dont l'algorithme converge en un nombre fini d'étapes.On a aussi abordé l'étude du problème de la programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers MOILFP, et on a réussi à généraliser la méthode $Z\epsilon$ donnant l'ensemble non dominé au problème MOILFP.

Ces deux méthodes sont exposées, illustrées sur des exemples montrant le déroulement des algorithmes et programmées en utilisant le logiciel Matlab.

On préconise d'aborder les points suivants dans nos travaux futurs :
- Etude comparative de méthodes dédiées au problème MOILFP,
- Amélioration des coupes proposées pour assurer une plus grande performance des méthodes décrites,
- Généralisation de la méthode $Z\epsilon$ au problème multi-objectif quadratique et fractionnaire quadratique en variables entières.

Références

[1] Abbas M., Moulaî M., Integer Linear Fractional Programming with Multiple Objective, Ricerca Operativa Journal of the Italian Operations Research Society 103,104, 15-38, 2002.

[2] Ait Mehdi M., Chergui M.E-A. and Abbas M.(2014) An Improved Method for Solving Multiobjective Integer Linear Fractional Programming Problem.

[3] Benson H. P.(1978) Existence of efficient solutions for vector maximization problems, *Journal of Optimization Theory and Appl*,26,569-580.

[4] C. A. Coello Coello and D. A. Van Veldhuizen. Evolutionary algorithms for solving multiobjective problems. Springer, New York, NY, USA, 2nd ed. edition, 2007.

[5] Chergui M.E., Moulaï M., An exact method for a discrete multiobjective linear fractional optimization.10, 1155, 2008.

[6] F. Y. Edgeworth. Mathematical physics. P. Keagan, London, 1881.

[7] Martos B., Nonlinear programming, Theory and Methods, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[8] Nagih A. and Plateau G. Problèmes fractionnaires : Tour d'horizon sur les applications : Tour d'horizon sur les applications et methods de resolution,RAIRO Oper. Res. 33, 383-419, 1999 .

[9] R. E. Steuer. Multiple criteria optimization : Theory, computation and application. John Wiley, New York, 1986.

[10] Schaible S. Duality in fractional programming : a unified approach, Operations Research, 24, No-3, 452-461, 1976.

[11] Schaible S. Fractional programming : applications and algorithms, European Journal of Operational Research 7, 111-120, 1981.

[12] Schaible S. Fractional programming : Zeitschrift fur Operational Research, 27, 39-54, 1983.

[13] Schaible S. Fractional programming, in R. Horst and P.M. Pardalos (eds.), Handbook of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, 495-608, 1995.

[14] Stancu-Minasian I.M. A fifth bibliography of fractional programming, Optimization 45,1-4, 343-367, 1999.

[15] Stancu-Minasian I.M. A sixth bibliography of fractional programming, Optimization 55, 4, 405-428, 2006.

[16] Stancu-Minasian I.M. Fractional Programming : Theeory, Methods and Applications, Kluwer.

[17] V.Pareto.(1896) Cours d'economie politique.Rouge, Lausanne.