Les Annales RECITS (http://www.lrecits.usthb.dz)
Vol. 3, 2016, pages 93-106

Propriétés probabilistes des modèles MS-$PARMA$

Billel ALIAT et Fayçal HAMDI

Laboratoire RECITS, Faculté de Mathématiques
USTHB, BP 32 El-Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie.

aliatbillel@yahoo.fr, fhamdi@usthb.dz

Abstract: In this paper, we propose a generalization of the classical Markov-switching $ARMA$ models to the periodic time-varying case. Specifically, we propose a Markov-switching periodic $ARMA$ (MS-$PARMA$) model. In addition of capturing regime switching often encountered during the study of many financial time series, this new model also captures the periodicity feature in the autocorrelation structure. We present sufficient conditions ensuring the existence of strictly periodically stationary solutions with finite order moments. We also obtain, under the condition of existence, the explicit expression of the variance, skewness and kurtosis.

Keywords: Time series with changes in regime, Markov-switching periodic $ARMA$ models, moment, periodic stationarity.

Résumé : Dans ce papier, nous proposons une généralisation des modèles $ARMA$ à changement de régimes Markovien classiques au cas des coefficients périodiques dans le temps. Plus précisément, nous proposons un modèle $PARMA$ à changement de régimes Markovien (MS-$PARMA$). Ce nouveau modèle capture outre les changements de régimes rencontrés souvent lors des études des séries financières, la périodicité cachée au niveau de leurs structures d'autocovariances. Nous présentons des conditions suffisantes assurant l'existence de solutions périodiquement strictement stationnaire et ayant des moments d'ordre supérieur finis. Nous obtenons également, sous la condition d'existence, l'expression explicite de la variance, le skewness et le kurtosis.

Mots clés : Séries chronologiques avec changement de régimes, modèles $PARMA$ à changement de régimes Markovien, moment, stationnarité périodique.

---

1 Introduction

Dans la modélisation des phénomènes stochastiques, exhibant une structure d'autocorrélation périodique, l'importance des modèles périodiques n'est plus à démontrer. En effet, plusieurs modèles de séries chronologiques périodiques ont été introduits dans la littérature. Parmi ces modèles, on retrouve les modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques ($PARMA$). Ces derniers ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche (e.g. Pagano (1978), Vicchia (1985), Bentarzi et Hallin (1994), Boshnakov (1996), Ula et Smadi (1997), Lund et Basawa (2000), Shao et Lund (2004), Bentarzi et *al.* (2008), Hamdi (2012) et bien d'autres). Le succès des modèles $PARMA$ est dû à leur efficacité dans la modélisation de plusieurs phénomènes stochastiques qui affichent une structure d'autocorrélation périodique qui ne peut être exprimée de manière adéquate par les modèles saisonniers classiques ($SARIMA$). Une autre raison importante de ce succès, est que les modèles $PARMA$ peuvent être exploités dans l'analyse des modèles $ARMA$ vectoriels ($VARMA$), afin de réduire le nombre de paramètres du modèle de manière remarquable.

Cependant, les séries financières exhibent des dynamiques statistiques complexes qui sont difficiles à reproduire à travers des modèles stochastiques linéaires. Ces dynamiques sont souvent dites faits stylisés des séries financières tels que, le regroupement de volatilité, la lourdeur des queues des distributions, l'excès de kurtosis, le changement de régime et la multimodalité. Ces propriétés illustrent la difficulté de la modélisation des séries financières où les hypothèses de linéarité et d'homoscédasticité se révèlent restreintes et souvent inadéquates en présence de ces faits stylisés et de ce fait, devraient être abandonnées. Pour cette raison, plusieurs modèles non linéaires ont été introduits dans la littérature pour faire face à ce genre de séries.

Les modèles à changement de régimes Markoviens (MS) ont attiré beaucoup d'attention depuis l'article fondateur d'Hamilton (1989). Dans les modèles MS, il existe un mécanisme de transition qui repose sur un processus d'état latent qui est supposé être une chaîne de Markov. A chaque période de temps, il existe donc une certaine probabilité d'appartenir à un régime et une probabilité de transition d'un régime à un autre. De nombreux travaux de prospection et d'analyse des modèles autoregressifs et moyennes mobiles à changement de régimes Markoviens (MS-$ARMA$) ont constitué jusqu'à présent le centre d'intérêt de plusieurs chercheurs dont Hamilton (1994), Krolzig (1997), Francq et Zakoïan (2001, 2002), Zhang and Stine (2001), Psaradakis et Spagnolo (2006), Chen et Tsay (2011), Cavicchioli (2016) , Fiorentini et al. (2016) et bien d'autres.

Vue l'importance des deux formulations MS et $PARMA$, nous proposons de combiner ces deux approches pour obtenir un nouveau modèle afin de capturer, non seulement, les changements de régimes, mais aussi la périodicité cachée dans la structure d'autocovariance ainsi que d'autres caractéristiques des séries financières. Le nouveau modèle que nous proposons, dans ce papier, est un modèle $PARMA$ à changement de régime Markovien (MS-$PARMA$) et nous le définissons comme un processus bivarié $\{(y_t, \Delta_t)\,; t \in \mathbb{Z}\}$ dans lequel le processus Δ_t, qui gouverne le changement de régime est une chaîne de Markov à espace d'états fini, homogène et ergodique, et y_t est un processus $PARMA$. Le reste de ce papier est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons la classe des modèles MS-$PARMA$. Dans la section 3, nous étudions certaines propriétés probabilistes du modèle proposé, à savoir la stationnarité périodique stricte et l'existence des moments d'ordre supérieur. Enfin, nous donnons, sous la condition d'existence, l'expression explicite de la variance, le skewness et le kurtosis.

2 Modèle $PARMA$ à changement de régime Markovien

Différents modèles à changement de régime markovien ont été utilisés dans la littérature économique afin de prendre en charge les principaux faits stylisés caractérisant des séries économiques et financières. Parmi ces faits stylisés citons le regroupement de volatilité, la lourdeur des queues des distributions, l'excès de kurtosis, le changement de régime et la multimodalité des distributions marginales. Notre attention est ici centrée sur les formulations qui sont capables de modéliser des séries temporelles non linéaires avec une structure d'autocorrélation périodique. Nous nous intéressons aux modèles $PARMA$ à changement de régime markovien. Dans ces modèles, les paramètres sont des fonctions périodiques et peuvent changer dans le temps selon une chaîne de Markov.

Considérons le modèles $PARMA$ à changement de régime markovien d'ordres (p, q) et de période S, suivant

$$y_t = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{d}\phi_{t,i}^{(k)}\mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}y_{t-i} + \sum_{k=1}^{d}\sigma_t^{(k)}\mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}\eta_t + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\theta_{t,j}^{(k)}\sigma_{t-j}^{(l)}\mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}\mathbf{1}_{(\Delta_{t-j}=l)}\eta_{t-j}, \tag{1}$$

où $\mathbf{1}_{(.)}$ désigne la fonction indicatrice, (Δ_t) est une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, d\}$ et $\{\eta_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendentes et identiquement distribuées ($i.i.d.$) telles que $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$ et $\mathbb{E}(\eta_t^2) = 1$. Les paramètres $\phi_{t,i}^{(k)}$, pour $1 \leq i \leq p$, $\theta_{t,j}^{(k)}$, pour $1 \leq j \leq q$, et $\sigma_t^{(k)}$ sont des fonctions périodiques de période S (i.e., $\phi_{t+\tau S,i}^{(k)} = \phi_{t,i}^{(k)}$, $\theta_{t+\tau S,j}^{(k)} = \theta_{t,j}^{(k)}$ et $\sigma_{t+\tau S}^{(k)} = \sigma_t^{(k)}$). Cela nous permet de dire qu'un $PARMA$ à changement de régime markovien est un processus $PARMA$ dont les paramètres périodiques, à chaque instant dépendent d'une chaîne de Markov non observable (Δ_t). Nous notons ce modèle $MS\text{-}PARMA_S(p, q)$.

Posons

$$\begin{aligned}\phi_{t,i}(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^{d}\phi_{t,i}^{(k)}\mathbf{1}_{(\Delta_t=k)},\\ \theta_{t,j}(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^{d}\theta_{t,j}^{(k)}\mathbf{1}_{(\Delta_t=k)},\end{aligned}$$

et

$$\epsilon_t(\Delta_t) := \sum_{k=1}^{d}\sigma_t^{(k)}\mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}\eta_t,$$

ainsi, le modèle (1) peut être reécrit sous la forme suivante

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_{t,i} (\Delta_t) y_{t-i} + \epsilon_t (\Delta_t) + \sum_{j=1}^{q} \theta_{t,j} (\Delta_t) \epsilon_{t-j} (\Delta_{t-j}). \tag{2}$$

Tout au long du reste de ce travail, nous allons utiliser les hypothèses suivantes :

H1. Les processus $\{\eta_t\}$ et $\{\Delta_t\}$ sont indépendants ;

H2. (Δ_t) est une chaîne de Markov homogène, stationnaire, irréductible et apériodique, à espace d'états fini $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, d\}$.

Les probabilités stationnaires de (Δ_t) sont notées par $\pi(k) = P(\Delta_t = k)$ et la matrice de probabilité de transition est notée par $\mathbb{P}$ et elle est représentée comme suit

$$\mathbb{P} = (p(k,l))_{k,l=1,\ldots,d} = \begin{pmatrix} p(1,1) & p(2,1) & \cdots & p(d,1) \\ p(1,2) & p(2,2) & \cdots & p(d,2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(1,d) & p(2,d) & \cdots & p(d,d) \end{pmatrix},$$

où $p(k,l) = P(\Delta_t = l \mid \Delta_{t-1} = k)$, et les probabilités de transition, en i étape, sont notées par $p^{(i)}(k,l) = P(\Delta_t = l \mid \Delta_{t-i} = k)$, pour $k, l \in \mathcal{E}$ et $i \geq 1$.

3 Propriétés probabilistes d'un modèle MS-$PARMA$

3.1 Stationnarité périodique stricte

Rappelons d'abord le concept de stationnarité périodique stricte. Le processus $\{y_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ est dit périodiquement strictement stationnaire ($p.s.s.$), de période $S \in \mathbb{N}^*$($\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers positifs), si les deux vecteurs $(y_{t_1}, y_{t_2}, ..., y_{t_k})$ et $(y_{t_1+\tau S}, y_{t_2+\tau S}, ..., y_{t_k+\tau S})$ ont la même distribution, pour tout $k \geq 1$ et $\tau, t_1, ..., t_k \in \mathbb{Z}$.

Dans cette section, nous allons donner une condition suffisante sous laquelle le modèle (1) admet une unique solution $p.s.s.$ Comme pour de nombreux modèles de séries chronologiques périodiques (e.g., Aknouche et Bentarzi (2008) pour le cas d'un modèle $GARCH$ périodique, Aknouche et Guerbyenne (2009a) pour le modèle autorégressif double périodique, Aknouche et Guerbyenne (2009b) pour le modèle autorégressif périodique à coefficients aléatoires), il est intéressant d'écrire (2) sous la forme d'une représentation markovienne équivalente, également appelée autorégressive à coefficients aléatoires, comme suit

$$z_t = A_t z_{t-1} + b_t, \tag{3}$$

où

$$\begin{array}{rcl} z_t & = & \left(y_t, ..., y_{t-p+1}, \epsilon_t\left(\Delta_t\right), ..., \epsilon_{t-q+1}\left(\Delta_{t-q+1}\right)\right)', \\ A_t & = & \left(\begin{array}{cccc} \phi_{t,1:p-1}\left(\Delta_t\right) & \phi_{t,p}\left(\Delta_t\right) & \theta_{t,1:q-1}\left(\Delta_t\right) & \theta_{t,q}\left(\Delta_t\right) \\ \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times(q-1)} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times(p-1)} & 0 & \mathbf{0}_{1\times(q-1)} & 0 \\ \mathbf{0}_{(q-1)\times(p-1)} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} & \mathbf{I}_{q-1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} \end{array}\right), \\ \phi_{t,1:p-1}\left(\Delta_t\right) & = & \left(\phi_{t,1}\left(\Delta_t\right), ..., \phi_{t,p-1}\left(\Delta_t\right)\right), \\ \theta_{t,1:q-1}\left(\Delta_t\right) & = & \left(\theta_{t,1}\left(\Delta_t\right), ..., \theta_{t,q-1}\left(\Delta_t\right)\right), \end{array}$$

et

$$b_t = \left(\epsilon_t\left(\Delta_t\right), \mathbf{0}_{1\times(p-1)}, \epsilon_t\left(\Delta_t\right), \mathbf{0}_{1\times(q-1)}\right)',$$

avec $\mathbf{I}_n$ et $\mathbf{0}_{n\times n'}$ sont, respectivement, la matrice identité d'ordre $n \times n$ et la matrice nulle d'ordre $n \times n'$. Ainsi, l'étude de la stationnarité périodique de la solution de (2) se déduit immédiatement de l'étude de la solution de (3) qui diffère de la formulation standard avec des coefficients stationnaires et ergodiques (cf. Bougerol and Picard, 1992 ; Francq and Zakoïan, 2001). Les coefficients (A_t, b_t) sont plutôt périodiquement stationnaires et périodiquement ergodiques. Notons qu'une équation similaire à (3) a été étudiée par Aknouche et Guerbyenne (2009a, b).

L'outil clé dans l'étude de la stationnarité périodique stricte est l'exposant de Lyapunov associé à la suite des matrices aléatoire indépendantes et périodiquement distribuées (*i.p.d.*) définies par Aknouche et Guerbyenne (2009a).

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur l'espace des matrices de dimension r, $\mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{R})$, où $r = p + q$. Alors, l'exposant de Lyapunov associé à la suite des matrices aléatoire périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique $A = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est défini par

$$\gamma^S(A) := \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left\{\log\|A_{nS}A_{nS-1}\dots A_1\|\right\}, \tag{4}$$

lorsque $\sum_{s=1}^{S}\mathbb{E}\left(\log^+\|A_s\|\right) < \infty$, où $\log^+(x) = \max(\log(x), 0)$, pour $x > 0$.

Théorèm 1 Le modèle (2) admet une solution nonanticipative et *p.s.s.* donnée par la première composante de

$$z_t = b_t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l}\right) b_{t-k}, \tag{5}$$

si $\gamma^S(A)$ est strictement négatif, où la série (5) converge presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{Z}$. De plus, le processus solution est unique et périodiquement ergodique.

Preuve. La preuve est similaire à celle d'Aknouche et Guerbyenne (2009b, Theorem 2.1 and Remark 2.1) et donc elle sera omise.

Comme dans Francq et Zakoïan (2001), nous pouvons montrer que seule la partie PAR

$$\Phi_t = \left(\begin{array}{cc} \phi_{t,1:p-1}\left(\Delta_t\right) & \phi_{t,p}\left(\Delta_t\right) \\ \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{array}\right),$$

de la matrice A_t qui détermine si $\gamma^S(A)$, donnée par (4), est strictement négative ou non.

Écrivons A_t comme suit

$$A_t = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Theta_t \\ \mathbf{0}_{q\times p} & J \end{pmatrix},$$

où

$$\Theta_t = \begin{pmatrix} \theta_{t,1:q-1}(\Delta_t) & \theta_{t,q}(\Delta_t) \\ \mathbf{0}_{(p-1)\times(q-1)} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1\times(q-1)} & 0 \\ \mathbf{I}_{q-1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} \end{pmatrix}.$$

Francq et Zakoïan (2001, p. 343), ont montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l} = \begin{pmatrix} \prod_{l=0}^{k-1} \Phi_{t-l} & \sum_{i=0}^{k-1}\left(\prod_{l=0}^{k-i-2}\Phi_{t-l}\right)\Theta_{t-k+i+1}J^i \\ \mathbf{0}_{q\times p} & J^k \end{pmatrix},$$

et si $k \geq q$, $J^k = 0$. En outre, ils ont montré que pour tout $k \geq q$ et $t \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l} = \left(\prod_{l=0}^{k-q-1}\widetilde{A}_{t-l}\right)\left(\prod_{l=k-q}^{k-1} A_{t-l}\right) = \left(\prod_{l=0}^{k-q-1} A_{t-l}\right)\left(\prod_{l=k-q}^{k-1}\widetilde{A}_{t-l}\right),$$

où $\widetilde{A}_t$ est la matrice obtenue en remplaçant Θ_t et J par, respectivement, $\mathbf{0}_{p\times q}$ et $\mathbf{0}_q$ dans A_t.

D'autre part, la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{R})$ induit une norme sur $\mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R})$, en définissant

$$\left\|\widetilde{A}_t\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \Phi_t & \mathbf{0}_{p\times q} \\ \mathbf{0}_{q\times p} & \mathbf{0}_q \end{pmatrix}\right\| = \|\Phi_t\|.$$

Donc,

$$\|A_{nS}A_{nS-1}\ldots A_1\| = \|\Phi_{nS}\Phi_{nS-1}\ldots\Phi_1\|.$$

Par suite,

$$\gamma^S(A) = \gamma^S(\Phi) := \inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left\{\log\|\Phi_{nS}\Phi_{nS-1}\ldots\Phi_1\|\right\}.$$

et donc l'exposant de Lyapunov associé à la suite des matrices $A = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ peut être remplacé par celui associé à la suite des matrices $\Phi = \{\Phi_t, t \in \mathbb{Z}\}$, dans la condition suffisante pour l'existence d'une solution nonanticipative et *p.s.s.* de (2).

Corollaire 1 Si $\gamma^S(\Phi)$ est strictement négatif, le modèle (2) admet une solution nonanticipative et *p.s.s.* donnée par la première composante de (5), qui converge presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{Z}$. De plus, le processus solution est unique et périodiquement ergodique.

Remarque 1 Si $S = 1$, alors le modèle (2) admet une solution strictement stationnaire, si

$$\gamma(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left\{\frac{1}{t}\|\Phi_t\Phi_{t-1}\ldots\Phi_1\|\right\} < 0.$$

Cette dernière condition est la même obtenue par Francq et Zakoïan (2001) (Theorem 1, p. 343) dans le cas d'un modèle non-périodique MS-$ARMA$ univarié.

3.2 Conditions d'existence des moments

Nous cherchons maintenant des conditions pour lesquelles le modèle (2) admet des moments d'ordre m, où m est un entier non nul quelconque. Notons par $\rho(A)$ le rayon spectral de toute matrice carrée A. Soit $\otimes$ le produit tensoriel, ou produit de Kronecker, et rappelons qu'il est défini de la manière suivante : pour deux matrices quelconques $A = (a_{i,j})$ et B, on a $A \otimes B = (a_{i,j} B)$. Pour toute matrice A soit $A^{[m]} = A \otimes \cdots \otimes A$, le produit de Kronecker de m fois la matrice A. Pour tout $m \geq 1$, $\mathcal{L}^m$ désigne l'espace de Hilbert de variables aléatoires X définies sur un espace de probabilité, tel que $\|X\|_{\mathcal{L}^m} = (\mathbb{E}\|X\|^m)^{1/m} < +\infty$.

Considérons aussi les matrices suivantes dont nous aurons besoin par la suite

$$\mathbb{P}_{f_t} = \begin{pmatrix} p(1,1) f_t(1) & \cdots & p(d,1) f_t(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(1,d) f_t(d) & \cdots & p(d,d) f_t(d) \end{pmatrix} \text{ et } \Pi_{f_t} = \begin{pmatrix} \pi(1) f_t(1) \\ \vdots \\ \pi(d) f_t(d) \end{pmatrix},$$

pour toute fonction périodique $f_t : \mathcal{E} \to \mathcal{M}_{n \times n'}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{M}_{n \times n'}(\mathbb{R})$ est l'espace des matrice réelles de dimension $n \times n'$ et pour tout entier positif n et n'. En utilisant ces notations, nous commençons par donner le résultat préliminaire suivant qui sera utile dans l'étude de certaines propriétés des processus *MS-PARMA*.

Lemme 1 Soient $f_t : \mathcal{E} \to M_{n \times n'}(\mathbb{R})$ et $g_t : \mathcal{E} \to M_{n \times n'}(\mathbb{R})$ deux fonctions périodiques, dans le temps t, de période S (i.e., pour tout $i \in E$, $f_t(i) = f_{t+\tau S}(i)$ et $g_t(i) = g_{t+\tau S}(i)$, $\forall t, \tau \in \mathbb{Z}$), alors pour $k > 0$,

$$\mathbb{E}\{f_t(\Delta_t) \ldots f_{t-k+1}(\Delta_{t-k+1}) g_{t-k}(\Delta_{t-k})\} = \mathbb{I}_n \left(\prod_{l=0}^{k-1} \mathbb{P}_{f_{t-l}}\right) \Pi_{g_{t-k}}, \tag{6}$$

où $I_n = (\mathbf{I}_n, \ldots, \mathbf{I}_n)$ est une matrice de dimension $n \times nd$.

Pour mettre l'accent sur la périodicité des fonctions f_t et g_t, ce même résultat peut être réécrit sous la forme équivalente suivante

$$\mathbb{E}\{f_t(\Delta_t) \ldots f_{t-k+1}(\Delta_{t-k+1}) g_{t-k}(\Delta_{t-k})\} = \mathbb{I}_n \left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{f_{s-l}}\right)^{\delta} \left(\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{f_{s-l}}\right) \Pi_{g_{s-\nu}}, \tag{7}$$

où $t = s + S\tau$ et $k = \nu + S\delta$ tel que $\tau \in \mathbb{Z}$, $\delta \in \mathbb{N}$ et $s, \nu \in \{1, 2, \ldots, S\}$.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{f_t(\Delta_t) \ldots f_{t-k+1}(\Delta_{t-k+1}) g_{t-k}(\Delta_{t-k})\} \\ = & \sum_{i_0=1}^{d} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{d} \sum_{i_k=1}^{d} \left(\prod_{j=0}^{k-1} f_{t-j}(i_j)\right) g_{t-k}(i_k) P(\Delta_t = i_0, \ldots, \Delta_{t-k+1} = i_{k-1}, \Delta_{t-k} = i_k) \\ = & \sum_{i_0=1}^{d} \sum_{i_1=1}^{d} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{d} \sum_{i_k=1}^{d} \left(\prod_{j=0}^{k-1} f_{t-j}(i_j)\right) g_{t-k}(i_k) \left(\prod_{j=0}^{k-1} p(i_{j+1}, i_j)\right) \pi(i_k). \end{aligned}$$

La relation (6) peut être vérifiée en écrivant le (i,j)-bloc de la matrice $\left(\prod_{l=0}^{k-1} \mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)$ comme suit

$$\left(\prod_{l=0}^{k-1} \mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)_{i,j} = \sum_{i_1=1}^{d} \sum_{i_2=1}^{d} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{d} f_t(i) \left(\prod_{l=1}^{k-1} f_{t-l}(i_l)\right) p(i_1, i) \left(\prod_{l=1}^{k-2} p(i_{l+1}, i_l)\right) p(j, i_{k-1}).$$

Cela peut être démontré facilement par réccurence sur k. Par conséquent, le $(i,1)$-bloc de la matrice $\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)\Pi_{g_{t-k}}$ est donné par

$$\left(\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)\Pi_{g_{t-k}}\right)_{i,1} = \sum_{i_1=1}^{d}\sum_{i_2=1}^{d}\cdots\sum_{i_k=1}^{d} f_t(i)\left(\prod_{l=1}^{k-1} f_{t-l}(i_l)\right)p(i_1,i)\left(\prod_{l=1}^{k-1} p(i_{l+1},i_l)\right)\pi(i_k)\,g_{t-k}(i_k).$$

A partir de la périodicité de la fonction f_t, il est facile de voir que $\mathbb{P}_{f_t}$ est une matrice périodique en t. Ce qui achève la preuve.

Maintenant nous donnons une condition nécessaire assurant l'existence de $\mathbb{E}(y_t^m)$, $m \geq 1$, d'une solution nonanticipative de (2). Ceci est équivalent, comme nous l'avons mentionné précédemment, à examiner l'existence d'une solutions dans $\mathcal{L}^m$ du processus $\{z_t;\ t\in\mathbb{Z}\}$, défini par (5).

Theorem 2 Supposons que $\mathbb{E}(\eta_t^m) < \infty$, et que le rayon spectral

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{S-s}^{[m]}\middle|\Delta_{S-s}=\cdot\right)}\right) < 1, \tag{8}$$

où m est un entier non nul quelconque. Alors le modèle (2) a une solution unique $\{y_t;\ t\in\mathbb{Z}\}$ non anticipative et *s.p.s.* Cette solution est également périodiquement ergodique et satisfait $\mathbb{E}(y_t^m) < \infty$.

Preuve. Soit

$$z_{t,k} := \left(\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l}\right) b_{t-k}, \text{ for } k \geq 1,$$

avec la convention $\prod_{k=x}^{y} A_k = \mathbf{I}_r$, pour $x > y$, i.e., $z_{t,0} = b_t$.

De l'indépendance des matrices et du vecteur $A_t, ..., A_{t-k+1}, b_{t-k}$ conditionnelles à Δ_t, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right) &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left(\left(\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l}^{[m]}\right) b_{t-k}^{[m]}\middle|\Delta_t,\ldots,\Delta_{t-k}\right)\right\}\\ &= \mathbb{E}\left\{\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{E}\left(A_{t-l}^{[m]}\middle|\Delta_{t-l}\right)\right)\mathbb{E}\left(b_{t-k}^{[m]}\middle|\Delta_{t-k}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Posons $t = s + S\tau$ et $k = \nu + S\delta$ tel que $\tau\in\mathbb{Z}$, $\delta\in\mathbb{N}$ et $s,\nu\in\{1,2,\ldots,S\}$. En utilisant l'équation (7) donnée dans le lemme précédent, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right) = \mathbb{I}_r\left(\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right)^{\delta}\left(\prod_{l=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right)\Pi_{\mathbb{E}\left(b_{s-v}^{[m]}\middle|\Delta_{s-v}=\cdot\right)}.$$

Soit $\|\cdot\|$ la norme matricielle telle que $\|X\| = \sum_{i,j}|x_{i,j}|$, où $x_{i,j}$ désigne l'élément générique de la matrice X. En utilisant certaines propriétés du produit de Kronecker, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|z_{t,k}\right\|_{\mathcal{L}^m} &\leq \left\|\mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right)\right\|^{1/m} \\
&\leq \left\|\mathbb{I}_r\right\|^{1/m} \left\|\left(\prod\nolimits_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right)^{\delta}\right\|^{1/m} \left\|\prod\nolimits_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right\|^{1/m} \\
&\quad \times \left\|\Pi_{\mathbb{E}\left(b_{s-v}^{[m]}\middle|\Delta_{s-v}=\cdot\right)}\right\|^{1/m}.
\end{aligned}$$

Si le rayon spectral de la matrice $\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}$ (qui est le même de la matrice $\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}$, comme l'ont montré Francq et Zakoïan (2001, Appendix A)) est strictement inférieur à 1, alors $\left\|\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right)^{\delta}\right\|$ Converge vers zéro à vitesse exponentielle quand $\delta \to \infty$. Puisque pour tout s, $\left\|\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right\|$ est uniformément bornée par $\max_{1\leq s\leq S}\left\|\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right\|$, qui est fini, alors $z_{t,k}$ converge vers zéro dans $\mathcal{L}^m$, à une vitesse exponentielle, lorsque $k{\rightarrow}\infty$. Par conséquent, $z_t = \sum_{k=0}^{\infty} z_{t,k}$ est dans $\mathcal{L}^m$. En outre, par la propriété circulaire du rayon spectral, on voit facilement que

$$\rho\left(\prod\nolimits_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right) = \rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{S-s}^{[m]}\middle|\Delta_{S-s}=\cdot\right)}\right), \text{ pour tout } s,\ 1 \leq s \leq S,$$

ceci implique qu'une condition suffisante pour l'existence de $\mathbb{E}\left(y_t^m\right)$ est alors

$$\rho\left(\prod\nolimits_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right) < 1.$$

De plus, pour tout K, $\sum_{k=0}^{K} z_{t,k}$ est une fonction mesurable, S-périodique, d'une suite périodiquement strictement stationnaire et périodiquement ergodique $\left\{(A_t, b_t)\,; t \in \mathbb{Z}\right\}$. Alors la solution z_t est *p.s.s.* et périodiquement ergodique (e.g. Aknouche et Guerbyenne, 2009*a*).

En utilisant le théorème 2, on peut établir une condition d'existence d'une solution périodiquement stationnaire au second ordre, également appelée solution périodiquement faiblement stationnaires (*p.f.s*). Rappelons qu'un processus stochastique $\{y_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ est dit périodiquement stationnaire au second ordre, de période S ($S \in \mathbb{N}^*$), si sa moyenne $\mu_t := \mathbb{E}\left(y_t\right)$ et sa fonction d'autocovariance $\gamma_h^{(t)} := cov\left(y_t, y_{t+h}\right)$ sont des fonction S-périodique, i.e., $\mu_t = \mu_{t+\tau S}$ et $\gamma_h^{(t)} = \gamma_h^{(t+\tau S)}$, $\forall \tau, h \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 2 Supposons que

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{S-s}^{[2]}\middle|\Delta_{S-s}=\cdot\right)}\right) < 1, \tag{9}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la série $z_t = b_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t A_{t-1} \ldots A_{t-k+1} b_{t-k}$ converge dans $\mathcal{L}^2$ et le processus $\{y_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$, défini comme la première composante de z_t, est l'unique nonanticipative et $p.f.s$ solution de (2).

Remarque 2 Lorsque $S = 1$, la condition (9) coïncide avec la condition suffisante donnée par Francq et Zakoïan (2001, Theorem 2) dans le cas d'un modèle MS-$ARMA$ univarié.

3.3 Calcul de la variance, le skewness et le kurtosis

Supposons que la condition (8) est satisfaite et que $\mathbb{E}\left(\eta_t^m\right) < \infty$, pour $m \leq 4$. Considérons les vecteurs S-périodiques de dimension $dr^m \times 1$,

$$M_{t,m} = \begin{pmatrix} M_{t,m}(1) \\ \vdots \\ M_{t,m}(d) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \pi(1)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[m]} \middle| \Delta_t = 1\right) \\ \vdots \\ \pi(d)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[m]} \middle| \Delta_t = d\right) \end{pmatrix} \text{ et } C_{t,m} = \begin{pmatrix} c_m(1) \\ \vdots \\ c_m(2) \end{pmatrix},$$

où les quantités $c_m(k)$ seront définies en fonction de la valeur de m. Alors les moments inconditionnels $\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\right)$ peuvent être obtenus comme suit

$$\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\right) = \sum_{k=1}^{d} \pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[m]} \middle| \Delta_t = k\right) = \sum_{k=1}^{d} M_{t,m}(k).$$

Il est important de noter que lorsque $m = 1$, la condition (8) est satisfaite et le processus $\{y_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus periodiquement stationnaire en moyenne avec des moyennes conditionnelles nulles. Par conséquent, c'est un processus centré.

Pour $m = 2$, il est facile de montrer, à partir de (3), que le moment conditionnel vérifie (voir Francq et Zakoïan, 2001, pp. 348-349)

$$\pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[2]} \middle| \Delta_t = k\right) = c_2(k) + \left(A_t^{(k)}\right)^{[2]} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]} \middle| \Delta_{t-1} = j\right) p(j,k)\,\pi(j),$$

où $A_t^{(k)} = \mathbb{E}\left(A_t \middle| \Delta_t = k\right)$, $b_t^{(k)} = \left(\sigma_t^{(k)}, \mathbf{0}_{1\times(p-1)}, \sigma_t^{(k)}, \mathbf{0}_{1\times(q-1)}\right)'$ et $c_2(k) = \pi(k)\left(b_t^{(k)}\right)^{[2]}$, pour $k = 1, ..., d$. Par suite, nous avons le système suivant

$$M_{t,2} = C_{t,2} + \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_t^{[2]} \middle| \Delta_t = \cdot\right)} M_{t-1,2}.$$

Après $S-1$ remplacements successifs dans ce dernier système et en tenant compte de la périodicité de $M_{t,2}$, nous obtenons

$$M_{t,2} = \sum_{i=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[2]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot\right)}\right) C_{t-i,2} + \left(\prod_{j=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[2]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot\right)}\right) M_{t,2}.$$

Ainsi,

$$M_{t,2} = \left[\mathbf{I}_{r^2} - \prod_{j=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[2]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot \right)} \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[2]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot \right)} \right) C_{t-i,2} \right].$$

Par conséquent, le moment inconditionnel d'ordre deux de z_t peut être obtenu comme suit

$$\mathbb{E}\left(z_t^{[2]} \right) = \sum_{k=1}^{d} M_{t,2}(k) = \mathbb{I}_r M_{t,2}.$$

Enfin, si $\{y_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ suit le processus (1) et si la condition (8) est satisfaite pour $m = 2$, alors la forme explicite de la variance, $var(y_t)$, est donnée par la première composante de $\mathbb{E}\left(z_t^{[2]} \right)$, i.e.,

$$\sigma_y^{(t)2} = var(y_t) = H_{r^2} \mathbb{I}_{r^2} M_{t,2},$$

où $H_n = \left(1, \mathbf{0}_{1\times(n-1)}\right)$.

D'autre part, il est encore possible de dériver une récurrence pour $M_{t,m}$, pour $m = 3, 4$, en utilisant la relation suivante

$$B \otimes A = K_{n_3,n_1}(A \otimes B) K_{n_2,n_4},$$

où A et B sont deux matrices respectivement d'ordre $n_1 \times n_2$ et $n_3 \times n_4$ et $K_{n,m}$ est la matrice de commutation de dimension $nm \times nm$ (voir par exemple Magnus and Neudecker (1999, Chapter 2, Theorem 9)). Cette matrice de permutation est particulièrement utile pour manipuler les vecteurs aléatoires et leurs moments. En effet, à partir de (3), il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} z_t^{[3]} &= b_t^{[3]} + (A_t z_{t-1})^{[3]} \\ &\quad + \left[\mathbf{I}_{r^3} + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r}) + (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r}) \right] \left(b_t^{[2]} \otimes A_t z_{t-1} \right) \\ &\quad + \left[\mathbf{I}_{r^3} + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r}) + (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r}) \right] \left((A_t z_{t-1})^{[2]} \otimes b_t \right), \end{aligned}$$

et en prenant l'espérance conditionelle par rapport à $\Delta_t = k$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \pi(k) \mathbb{E}\left(z_t^{[3]} \middle| \Delta_t = k \right) &= \pi(k) \left(b_t^{(k)} \right)^{[3]} \mathbb{E}\left(\eta_t^3 \right) + \left(A_t^{(k)[3]} \right) \pi(k) \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[3]} \middle| \Delta_t = k \right) \\ &= c_3(k) + \left(A_t^{(k)} \right)^{[3]} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[3]} \middle| \Delta_{t-1} = j \right) p(j,k) \pi(j) \end{aligned}$$

où $c_3(k) = \pi(k) \left(b_t^{(k)} \right)^{[3]} \mathbb{E}\left(\eta_t^3 \right)$. Nous avons alors

$$M_{t,3} = C_{t,3} + \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_t^{[3]} \middle| \Delta_t = \cdot \right)} M_{t-1,3},$$

qui donne après $S-1$ remplacements successifs

$$M_{t,3} = \left[\mathbf{I}_{r^3} - \prod_{j=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[3]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot \right)} \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[3]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot \right)} \right) C_{t-i,3} \right].$$

Maintenant, en utilisant les mêmes techniques, pour $m=4$, nous obtenons

$$\begin{aligned} z_t^{[4]} &= b_t^{[4]} + (A_t z_{t-1})^{[4]} \\ &+ [\mathbf{I}_{r^4} + (\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r}) + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r}) \\ &+ (K_r \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})] \left(b_t^{[3]} \otimes A_t z_{t-1} \right) \\ &+ [\mathbf{I}_{r^4} + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) + (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) \\ &+ (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) + (\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})(K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) \\ &+ (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})(K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)] \left((A_t z_{t-1})^{[2]} \otimes b_t^{[2]} \right) \\ &+ [\mathbf{I}_{r^4} + (\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r}) + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r}) \\ &+ (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})] \left((A_t z_{t-1})^{[3]} \otimes b_t \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[4]} \middle| \Delta_t = k \right) &= \pi(k) \left(b_t^{(k)} \right)^{[4]} \mathbb{E}\left(\eta_t^4\right) \\ &+\pi(k)\,[\mathbf{I}_{r^4} + (\mathbf{I}_r \otimes K_r \otimes \mathbf{I}_r) + (K_r \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_r \otimes \mathbf{I}_r) \\ &+ (\mathbf{I}_r \otimes K_r)(\mathbf{I}_r \otimes K_r \otimes \mathbf{I}_r) + (\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_r)(K_r \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_r \otimes \mathbf{I}_r) \\ &+ (\mathbf{I}_r \otimes K_r \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_r)(K_r \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_r \otimes \mathbf{I}_r)] \\ &\times \left(\left(A_t^{(k)} \right)^{[2]} \otimes \left(b_t^{(k)} \right)^{[2]} \right) \mathbb{E}\left(\eta_t^2\right) \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]} \middle| \Delta_t = k \right) \\ &+ \left(A_t^{(k)} \right)^{[4]} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[4]} \middle| \Delta_{t-1} = j \right) p(j,k)\,\pi(j) \\ &= c_4(k) + \left(A_t^{(k)} \right)^{[4]} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[4]} \middle| \Delta_{t-1} = j \right) p(j,k)\,\pi(j), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} c_4(k) &= \pi(k) \left(b_t^{(k)} \right)^{[4]} \mathbb{E}\left(\eta_t^4\right) \\ &+\pi(k)\,[\mathbf{I}_{r^4} + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) + (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) \\ &+ (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) + (\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})(K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) \\ &+ (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})(K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)] \\ &\times \left(\left(A_t^{(k)} \right)^{[2]} \otimes \left(b_t^{(k)} \right)^{[2]} \right) \mathbb{E}\left(\eta_t^2\right) \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]} \middle| \Delta_t = k \right), \end{aligned}$$

à partir de laquelle nous pouvons facilement montrer que

$$M_{t,4} = \left[\mathbf{I}_{r^4} - \prod_{j=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[4]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot \right)} \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[4]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot \right)} \right) C_{t-i,4} \right].$$

Proposition 1 Pour une solution périodiquement stationnaire $\{y_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ du modèle *MS-PARMA* défini par (1) et sous l'hypothèse que la condition (8) est satisfaite et $\mathbb{E}\left(\eta_t^m\right) < \infty$, pour $m \leq 4$, nous avons

$$\mathbb{E}\left(y_t^m\right) = H_{r^m} \mathbb{I}_{r^m} M_{t,m}.$$

La variance, le skewness et le kurtosis de la distribution de $y_{s+\tau S}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(s)2} &= H_{r^2}\mathbb{I}M_{s,2},\ s=1,2,...,S,\\
sk_y^{(s)} &: = \frac{\mathbb{E}\left(y_{s+\tau S}^3\right)}{\left[\mathbb{E}\left(y_{s+\tau S}^2\right)\right]^{3/2}} = \frac{H_{r^3}\mathbb{I}_{r^3}M_{s,3}}{\left[H_{r^2}\mathbb{I}_{r^2}M_{s,2}\right]^{3/2}},\ s=1,2,...,S,
\end{aligned}$$

et

$$\kappa_y^{(s)} := \frac{\mathbb{E}\left(y_{s+\tau S}^4\right)}{\left[\mathbb{E}\left(y_{s+\tau S}^2\right)\right]^2} = \frac{H_{r^4}\mathbb{I}_{r^4}M_{s,4}}{\left[H_{r^2}\mathbb{I}_{r^2}M_{s,2}\right]^2},\ s=1,2,...,S.$$

Références

[1] Aknouche, A. & Guerbyenne, H. (2009*a*). On some probabilistic properties of double periodic *AR* models. *Statist. Probab. Lett.*, **79**, 407-413.

[2] Aknouche, A. & Guerbyenne, H. (2009*b*), Periodic stationarity of random coefficient periodic autoregressions. *Statist. Probab. Lett.*, **79**, 990-996.

[3] Bentarzi, M., Hallin, M. (1994). On the Invertibility of Periodic Moving Average Models. *J. Time Ser. Anal.*, **15**, 263-268.

[4] Bentarzi, M., Guerbyenne, H., Hemis, R., (2008). Predictive density order selection of periodic *AR* models. *Comm. Statist. Simulation Comput.*, **37**, 1167-1182.

[5] Boshnakov, G. N., (1996). Recursive computation of the parameters of periodic autoregressive moving-average processes. *J. Time Ser. Anal.*, **17**, 333-349.

[6] Bougerol, P., Picard, N., (1992). Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *Ann. Probab.,* **20**, 1714-1730.

[7] Cavicchioli, M. (2016). Third and fourth moments of vector autoregressions with regime switching. *Comm. Statist. -Theor. Meth.*, (just-accepted).

[8] Chen, C.C., Tsay, W.J., (2011). A Markov regime-switching *ARMA* approach for hedging stock indices. *J. Futures Markets*, **31**, 165-191.

[9] Fiorentini, G., Planas, C., & Rossi, A. (2016). Marginal distribution of Markov-switching *VAR* processes. *Comm. Statist. -Theor. Meth.*, (just-accepted).

[10] Francq, C., Zakoïan, J. M., (2001). Stationarity of multivariate Markov-switching *ARMA* models. *J. Econometrics*, **102**, 339-364.

[11] Francq, C., Zakoïan, J. M., (2002) Autocovariance structure of powers of switching-regime *ARMA* processes. *ESAIM : Probab. Statist*, **6**, 259-270.

[12] Hamdi, F., (2012). Computing the exact Fisher information matrix of periodic state-space models. *Comm. Statist.-Theor. Meth.*, **41**, 4182-4199.

[13] Hamilton, J.D. (1989). A new approach to the economie analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, **57**, 357-384.

[14] Hamilton, J. D., (1994). *Time series analysis.* Princeton University Press, New Jersey.

[15] Krolzig, H.M., (1997). *Markov-Switching Vector Autoregressions : Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis.* Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag.

[16] Lund, R., Basawa, I. V., (2000). Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic $ARMA$ models. *J. Time Ser. Anal.*, **21**, 75-93.

[17] Magnus, J. R., Neudecker, H. (1999). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Economics*, revised ed.

[18] Pagano, M., (1978). On periodic and multiple autoregression. *Ann. Statist.*, 6, 1310-1317.

[19] Psaradakis, Z., Spagnolo, N., (2006) Joint determination of the state dimension and autoregressive order for models with in Markov regime switching. *J. Time Ser. Anal.*, **27**, 753-766.

[20] Shao, Q., Lund, R. (2004). Computation and characterization of autocorrelations and partial autocorrelations in periodic $ARMA$ models. *J. Time Ser. Anal.*, **25**, 359-372.

[21] Ula, T. A., Smadi A. A., (1997). Periodic stationary conditions for periodic autoregressive moving average processes as eigenvalue problems. *Water Resources Research*, **33**, 1929-1934.

[22] Vecchia, A. V., (1985). Maximum likelihood estimation for periodic autoregressive Moving average models. *Technometrics*, **27**, 375-384.

[23] Zhang, J., Stine, R.A., (2001). Autocovariance structure of Markov regime switching models and model selection. *J. Time Ser. Anal.*, **22**, 107-124.