Les Annales RECITS (http://www.lrecits.usthb.dz)
Vol. 04, 2017, pages 9-12

Partition en triangles d'un graphe triparti particulier

Nour El Houda TELLACHE et Mourad BOUDHAR

Laboratoire RECITS, Faculté de Mathématiques,
Université USTHB, BP 32 El-Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie

nour.tellache@gmail.com, mboudhar@yahoo.fr

Abstract: We discuss in the paper the complexity of the Partition Into Triangles (PIT) problem on a particular 3-partite graph, where the set of edges can be partitioned into special cycles of length 6. We prove that this problem is NP-hard in the strong sense by means of a reduction from a variant of the open shop problem with conflict graph that has been studied recently in [4].

Keywords: Partition Into Triangles, 3-partite graph, Complexity, Open shop, Conflict graph.

Résumé : Nous discutons dans ce papier de la complexité du problème de Partition en Triangles d'un graphe triparti, où l'ensemble des arêtes peut être partitionné en cycles de longueur 6. Nous prouvons que ce problème est NP-difficile au sens fort au moyen d'une réduction d'une variante du problème d'ordonnancement d'ateliers à cheminement libre avec un graphe de conflit qui a été étudié récemment dans [4]

Mots clés : Partition en triangles, graphe triparti, complexité, atelier à cheminement libre, graphe de conflit.

---

1 Introduction

Considérons l'instance suivante du problème de la partition en Triangles (PIT).

Problème : Partition en Triangles d'un graphe triparti particulier (noté PIT-P3P).

Instance : Un graphe triparti $G = (V, E)$ avec $|V| = 3n$ pour un entier n et une tripartition $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, où $V_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{in}\}$ est un stable ($i = 1, 2, 3$) et les arêtes de E peuvent partitionnées en cycles de longueur 6 de la forme $\{v_{1l}, v_{2k}, v_{3l}, v_{1k}, v_{2l}, v_{3k}, v_{1l}\}$, $(l \neq k)$.

Question : Peut-on partitionner les sommets de G en n ensembles disjoints contenant exactement 3 sommets, tels que chacun de ces ensembles induit un triangle dans G ?

PIT est connu pour être NP-difficile au sens fort pour les graphes tripartis arbitraires [3]. Van Rooij, Van Kooten Niekerk et Bodlaender [5] ont prouvé que le problème PIT est résoluble en temps polynomial pour des graphes de degré maximum trois, mais le graphe G peut avoir des sommets de degré supérieur à 3. Ils ont également établi des résultats de NP-difficulté pour les graphes 4-réguliers, cependant leurs graphes ne sont pas tripartis. Récemment, Ćustić, Klinz et Woeginger [2] ont montré que PIT pour un graphe 6-regular triparti est NP-difficile, mais leur graphe est un graphe arbitraire 6-régulier triparti.

Pour prouver la complexité de PIT-P3P, nous considérons le problème d'ordonnancement suivant. Les entrées sont constituées d'un ensemble fini $\{J_j, j = 1, \ldots, n\}$ de n tâches qui doivent être traitées dans un open shop à trois machines et un graphe simple et non orienté $G' = (V', E')$ sur les tâches, appelé graphe de conflit. Chaque tâche J_j est constitué de trois opérations $\{J_{ij}, i = 1, \ldots, 3\}$, où J_{ij} doit être traitée sur la machine M_i et nécessite $p_{ij} = 1$ unité de temps de traitement. Les opérations de chaque tâche peuvent être traitées dans n'importe quel ordre, mais seulement un à la fois. Chaque machine peut traiter au plus une opération à la fois. Chaque sommet dans G' représente une tâche et les tâches qui sont représentés par des sommets adjacents dans G' sont en conflit et ne peuvent pas être traités simultanément sur des machines différentes. L'objectif est de trouver un ordonnancement qui minimise le temps d'achèvement maximum appelé aussi le makespan. On note ce problème d'ordonnancement par $O3|ConfG' = (V', E'), p_{ij} = 1|C_{max}$, où $ConfG' = (V', E')$ indique la présence d'un graphe de conflit $G' = (V', E')$ sur les tâches. Ce graphe modélise les applications dans lesquelles les tâches nécessitent l'utilisation de ressources supplémentaires non partageables [1], où deux tâches ayant des ressources communes peuvent ne pas s'exécuter simultanément [4]. Les auteurs de [4] ont étudié différentes variantes du problème de l'atelier open shop avec un graphe de conflit et ont montré que $O3|ConfG' = (V', E'), p_{ij} = 1|C_{max}$ est NP-difficile au sens fort.

2 Complexity

Avant de passer à la complexité de notre problème, discutons quelques caractéristiques du graphe G.

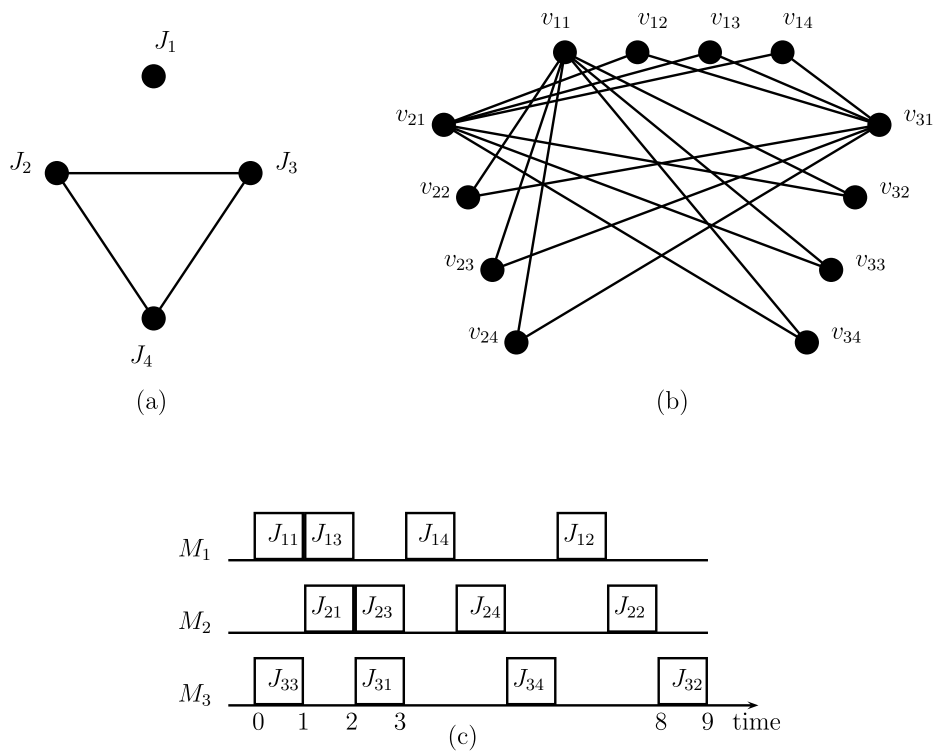

FIGURE 1 – (a) graphe de conflit $G' = (V', E')$. (b) le graphe triparti $G = (V, E)$ construit à partir de G'. (c) un ordonnancement réalisable des tâches de G'.

Remarque 1 *Chaque sommet de $G = (V, E)$ a un degré pair.*

Preuve. Puisque l'ensemble E peut être partitionné en cycles et que le degré de tout sommet dans un cycle est 2, il s'en suit que les sommets de G ont un degré pair. ■

Remarque 2 *Les sommets v_{1j},v_{2j} et v_{3j} forme un stable, $\forall\ j = 1, \ldots, n$.*

Preuve. Puisque E peut être partitionné en cycles de longueur 6 de la forme $\{v_{1l}, v_{2k}, v_{3l}$ $, v_{1k}, v_{2l}, v_{3k}, v_{1l}\}$ pour $l \neq k$, alors v_{1l},v_{2l} et v_{3l} ne peuvent pas être adjacents et de même pour v_{1k},v_{2k} et v_{3k}. En d'autres termes, il n'y a aucune arête entre deux sommets v_{aj} et v_{bj} avec $a \neq b$ et $a, b = 1, \ldots, 3$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. D'où la remarque. ■

Théoreme 1 *PIT-P3P est NP-difficile au sens fort.*

Preuve. Le problème utilisé dans le processus de réduction est $O3|ConfG' = (V', E')$, $p_{ij} = 1|C_{max}$, qui est montré NP-difficile au sens fort [4].

Etant donné une instance arbitraire I de $O3|ConfG' = (V', E'), p_{ij} = 1|C_{max}$, nous construisons le graphe $G = (V, E)$ comme suit (voir Figure 1) :

– Chaque opération J_{ij} de I est associé avec un sommet v_{ij} dans V_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

– Pour chaque pair de tâches J_l et J_k, telle que $\{J_l, J_k\} \notin E'$, nous construisons un cycle dans G de longueur 6 de la forme $\{v_{1l}, v_{2k}, v_{3l}, v_{1k}, v_{2l}, v_{3k}, v_{1l}\}$.

Ainsi, deux opérations peuvent être traitées simultanément si et seulement si leurs sommets correspondants sont adjacents dans G.

Nous montrons qu'il existe un ordonnancement réalisable σ pour I tel que $C_{max}(\sigma) \leq n$ si et seulement si PIT-P3P a une solution.

Supposons qu'il existe un ordonnancement réalisable σ pour I tel que $C_{max}(\sigma) \leq n$. Puisque la somme des temps de traitement de toutes les tâches est n sur chaque machine, il n'y a pas de temps d'inactivité sur toutes les machines et $C_{max}(\sigma) = n$. Par conséquent, pour chaque unité de temps, nous avons trois opérations traitées simultanément sur les trois machines. Par construction du graphe G, ces opérations correspondent à trois sommets adjacents dans G. Puisque les opérations de I sont en correspondance biunivoque avec les sommets de G, une solution de PIT-P3P suit.

Conversely, assume that PIT-P3P has a solution. We construct a schedule σ for I by processing the operations corresponding to each triangle of the solution of PIT-P3P simultaneously on the three machines, which requires one time unit for each triangle. The obtained schedule is feasible since it satisfies all the conflict constraints, and $C_{max}(\sigma) = n$. The reduction used is polynomial, which completes the proof of the Theorem.

Inversement, supposons que PIT-P3P a une solution. Nous construisons un ordonnancement σ pour I en traitant simultanément les opérations correspondant à chaque triangle de la solution de PIT-P3P sur les trois machines, ce qui nécessite une unité de temps pour chaque triangle. L'ordonnancement obtenu est réalisable car elle satisfait toutes les contraintes de conflit, et $C_{max}(\sigma) = n$. La réduction utilisée est polynomiale, ce qui complète la démonstration du Théorème. ■

Références

[1] J. Błażewicz, W. Cellary, R. Slowinski, and J. Weglarz. Scheduling under resource constraints-deterministic models. *Annals of Operations Research*, 7, 1986.

[2] A. Custic, B. Klinz, and G. J. Woeginger. Geometric versions of the three-dimensional assignment problem under general norms. *Discrete Optimization*, 18 :38–55, 2015.

[3] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York : Freeman, 1979.

[4] Nour El Houda Tellache and Mourad Boudhar. Open shop scheduling problems with conflict graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 227 :103 – 120, 2017.

[5] J. M. M. van Rooij, M. E. van Kooten Niekerk, and H. L. Bodlaender. Partition into triangles on bounded degree graphs. *Theory of Computing Systems*, 52 :687–718, 2013.