Les Annales RECITS (http://www.lrecits.usthb.dz)
Vol. 05, 2018, pages 53-65

Le p, q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas généralisées

Hacène Belbachir[1], **Athmane Benmezai**[1,2]

[1]USTHB, Faculty of Mathematics, RECITS Laboratory
BP 32, El Alia 16111, Bab Ezzouar, Algiers, Algeria.
[2]Univ. Algiers 3, Fac. Eco. & Manag. Sc
Rue Ahmed Ouaked, Dely Brahim, Algiers, Algeria.

hacenebelbachir@gmail.com or hbelbachir@usthb.dz
athmanebenmezai@gmail.com

Abstract: We introduce the p, q-analogue of generalized Fibonacci and Lucas sequences

Keywords: q-binomial coefficients ; bi^{s}nomial coefficients ; Fibonacci sequences

Résumé : Notre but est d'introduire le p, q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas généralisées.

Mots clés : Suite de Fibonacci ; les coefficients q-binomiaux ; les coefficients bi^{s}nomiaux.

1 Introduction

Les coefficients p, q-binomiaux sont introduit par Corcino [8] et utilisés dans plusieurs travaux de recherche. Dans ce papier on exploite ces coefficients pour étendre l'approche de Cigler [7] pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci et de Lucas au cas p, q-analogue.

En reprenant le travail publié dans [5], on introduit les coefficients p, q-bi^{s}nomiaux, qui sont à la fois une généralisation des coefficients q-bi^{s}nomiaux et une généralisation des coefficients p, q-binomiaux, ces coefficients seront étudiés et utilisés pour définir le p, q-analogue de la suite de Fibonacci généralisée. Pour la suite de Lucas on étend l'approche qu'on a proposé dans [4].

2 Les coefficients p, q-bi^{s}nomiaux

Les coefficients *bi^{s}nomiaux* $\binom{n}{k}_s$ généralisent les coefficients binomiaux et il sont définis par la fonction génératrice

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^s\right)^n = \sum_{k=0}^{ns} \binom{n}{k}_s x^k,$$

avec la convention que $\binom{n}{k}_s = 0$ pour $k < 0$ ou $k > sn$.

Pour une introduction appropriée de ces nombres, on renvoie le lecteur à Smith et Hogatt [11], Bollinger [6] et Andrews et Baxter [1].

De [2] on tire les identités suivantes :

Une expression via les coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{s-1}}{j_s}.$$

Une relation de récurrence longitudinale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^{s} \binom{n-1}{k-m}_s.$$

Une relation de récurrence diagonale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{m}{k-m}_{s-1}.$$

Une expression avec un unique symbole de sommation : la formule de De Moivre

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(s+1)\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{k-j\,(s+1)+n-1}{n-1}.$$

Dans [5], on a montré l'égalité

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} \binom{n}{j_1}\binom{n}{j_2}\cdots\binom{n}{j_s}(-1)^k\, a^{-\sum_{r=1}^{s} rj_r},$$

avec $a = e^{i\frac{2\pi}{s+1}}$ et $i^2 = -1$

Les polynômes des Gauss sont considérés comme le q-analogue des coefficients binomiaux et il sont donnés par $\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$ avec $[n]_q! = [1]_q[2]_q\cdots[n]_q$ et $[n]_q = 1+q+\cdots+q^{n-1}$. Corcino [8] propose le p,q-analogue des coefficients binomiaux en remplaçant $[n]_q$ par $[n]_{p,q} = p^{n-1}+p^{n-2}q+\cdots+q^{n-1}$ dans l'expression des polynômes de Gauss, ainsi il propose de poser

$$\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_{q,p} = q^{k(n-k)}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_{p/q} = p^{k(n-k)}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_{q/p}, \tag{1}$$

et la symétrisation par rapport à p et q dans l'expression des coefficients p,q-binomiaux, lui permet d'unifier les deux relations triangulaires

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1\end{bmatrix}_q,\\ \begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q &= q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1\end{bmatrix}_q,\end{aligned}$$

vérifiées par les coefficients q-binomiaux, par la relation symétrique

$$\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_{p,q} = p^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_{p,q} + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1\end{bmatrix}_{p,q}, \tag{2}$$

par suite, il obtient

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(p^jx+q^jy\right) = \sum_{k=0}^{n} p^{\binom{n-k}{2}}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_{p,q} x^{n-k}y^k. \tag{3}$$

En s'inspirant de l'approche qu'on a proposé pour les coefficients q-bi^{s}nomiaux dans [5], on suggère de définir les coefficients p,q-bi^{s}nomiaux par

Définition 1 *Pour $s \geq 1$ on définit le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux par*

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}\\ &= (-1)^k \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\begin{bmatrix} n \\ j_1\end{bmatrix}_{p,q}\begin{bmatrix} n \\ j_2\end{bmatrix}_{p,q}\cdots\begin{bmatrix} n \\ j_s\end{bmatrix}_{p,q} q^{\sum_{r=1}^{s}\binom{j_r}{2}}p^{\sum_{r=1}^{s}\binom{n-j_r}{2}}a^{-\sum_{r=1}^{s} rj_r},\end{aligned}$$

où $a = e^{i\frac{2\pi}{s+1}}$ et $i^2 = -1$.

Le cas particulier $p=1$ donne le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux définis dans [5] où on montre le développement

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+q^jz+\cdots+\left(q^jz\right)^s\right)=\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}z^k. \tag{4}$$

Pour plus de propriètès sur le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux, on renvoie le lecteur à [5].
L'égalité (4) admet un p,q-analogue donné par :

Théorème 1 *Le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux satisfont la relation*

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^jx\right)^{s-t}\left(q^jy\right)^t\right)=\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}x^{ns-k}y^k. \tag{5}$$

Preuve. Pour $a=\exp\left(i\frac{2\pi}{s+1}\right)$ avec $i^2=-1$ on a

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^jx\right)^{t}\left(q^jy\right)^{s-t}\right) &= \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^jx\right)^{t}\left(q^jy\right)^{s-t}\right)\\ &= \prod_{j=0}^{n-1}\left(\prod_{r=1}^{s}\left(q^jy-a^rp^jx\right)\right)\\ &= \prod_{r=1}^{s}\left(\prod_{j=0}^{n-1}\left(q^jy-a^rp^jx\right)\right),\end{aligned}$$

avec la relation (3) on trouve

$$\begin{aligned}&\prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^jx\right)^{t}\left(q^jy\right)^{s-t}\right)\\ &= \prod_{r=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{n}p^{\binom{n-k}{2}}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}\left(-a^rx\right)^{n-k}y^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}x^{ns-k}y^k.\end{aligned}$$

■

Pour $s=1$, on a $\left[{n \atop k}\right]_{p,q}^{(1)}=p^{\binom{n-k}{2}}q^{\binom{k}{2}}\left[{n \atop k}\right]_{p,q}$ et les relations (1) et (3) deviennent respectivement

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(1)} &= q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p/q}^{(1)}, && (6)\\ \prod_{j=0}^{n-1}\left(p^jx+q^jy\right) &= \sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(1)}x^{ns-k}y^k. && (7)\end{aligned}$$

La relation (7) est donnée par le Théorème 1 avec $s = 1$, et la relation (6) est généralisée pour $s \geq 1$ par :

Corollaire 2 *Le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux et le q/p-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux sont liés par la formule*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = p^{s\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q/p}^{(s)}.$$

Preuve. Du Théorème 1, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} x^{ns-k} y^k &= \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^{s-t} \left(q^j y\right)^t \right) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \left(p^j x\right)^s \left(1 + t^j z + \cdots + \left(t^j z\right)^s\right), \end{aligned}$$

où $z = y/x$ et $t = q/p$, et en utilisant la relation (4), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} x^{ns-k} y^k &= p^{s\binom{n}{2}} x^{ns} \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{t}^{(s)} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{ns} p^{s\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q/p}^{(s)} x^{ns-k} y^k, \end{aligned}$$

par identification, on tire le résultat. ■

Pour déterminer les coefficients q-bi^{s}nomiaux progressivement, on a montré dans [5], que ces derniers vérifient deux relations longitudinales données par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{q}^{(s)} &= \sum_{j=0}^{s} q^{nj} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_{q}^{(s)}, \\ \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{q}^{(s)} &= \sum_{j=0}^{s} q^{k-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_{q}^{(s)}. \end{aligned}$$

Le résultat suivant donne des relations duales vérifiées par les coefficients p,q-bi^{s}nomiaux.

Théorème 3 *Le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux satisfait les récurrences*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{j=0}^{s} p^{n(s-j)} q^{nj} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{j=0}^{s} p^{ns-k+j} q^{k-j} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}. \tag{9}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{n}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^{j}x\right)^{s-t}\left(q^{j}y\right)^{t}\right) &= \left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^{n}x\right)^{s-t}\left(q^{n}y\right)^{t}\right)\prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^{j}x\right)^{s-t}\left(q^{j}y\right)^{t}\right)\\ &= \left(\sum_{t=0}^{s}x^{s-t}y^{t}\right)\prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^{j+1}x\right)^{s-t}\left(q^{j+1}y\right)^{t}\right),\end{aligned}$$

d'après le Théorème 1 on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}x^{ns-k}y^{k} &= \left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^{n}x\right)^{s-t}\left(q^{n}y\right)^{t}\right)\left(\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}x^{ns-k}y^{k}\right)\\ &= \left(\sum_{t=0}^{s}x^{s-t}y^{t}\right)\left(\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{ns-k}(qy)^{k}\right).\end{aligned}$$

En développant le second membre de chacune des deux égalités précédentes, on tire le résultat par identification. ■

L'identité de Chu-Vandermonde

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j},$$

a un q-analogue (voir [9] et [10]) vérifié par les coefficients q-binomiaux, donné par

$$\begin{bmatrix}n+m\\k\end{bmatrix}_{q}=\sum_{j=0}^{k}q^{(n-j)(k-j)}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_{q}\begin{bmatrix}m\\k-j\end{bmatrix}_{q}.$$

L'usage du Théorème 1 dans l'égalité

$$\begin{aligned}&\prod_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^{j}x\right)^{s-t}\left(q^{j}y\right)^{t}\right)\\ =\ &\prod_{j=0}^{n}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^{j}x\right)^{s-t}\left(q^{j}y\right)^{t}\right)\prod_{j=0}^{m}\left(\sum_{t=0}^{s}\left(p^{j+n}x\right)^{s-t}\left(q^{j+n}y\right)^{t}\right),\end{aligned}$$

donne une généralisation du p,q-analogue de l'identité de Chu-Vandermonde :

Théorème 4 *Le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux satisfait la relation*

$$\begin{bmatrix}n+m\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{s}=\sum_{j=0}^{k}p^{n(ms+i-k)}q^{n(k-i)}\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}_{p,q}^{s}\begin{bmatrix}m\\k-i\end{bmatrix}_{p,q}^{s}.$$

3 Le p, q-analogue de la suite de Fibonacci généralisée

La suite de Fibonacci est donnée par la somme des éléments parcourant la diagonale principale sur le triangle de Pascal et elle est généralisée dans plusieurs directions, l'une d'elles donne la suite multibonacci qui admet une expression via les coefficients bi^{s}nomiaux donnée dans [2] par

$$\phi_n^{(s)} = \sum_{l\geq 0} \binom{n-l}{l}_s, \tag{10}$$

une seconde direction est la généralisation de la suite de Fibonacci á la suite r-Fibonacci

$$f_n^{[r]} = \sum_{l\geq 0} \binom{n-rl}{l},$$

qui est obtenue en sommant selon une autre transversale sur le triangle de Pascal.

Dans la première partie de cette section, on s'est intéressé au p, q-analogue de la suite multibonacci, et dans la seconde partie on étudie le p, q-analogue de la suite r-Fibonacci.

3.1 La suite p, q-multibonacci

Désignons par $(\phi_n^{(s)})_{n\geq -s}$, la suite "multibonacci" définie pour $s > 1$, par la relation de récurrence

$$\begin{cases} \left(\phi_{-s}^{(s)}, \ldots, \phi_{-1}^{(s)}, \phi_0^{(s)}\right) = (0, \ldots, 0, 1)\,, \\ \phi_n^{(s)} = \phi_{n-1}^{(s)} + \phi_{n-2}^{(s)} + \cdots + \phi_{n-s-1}^{(s)}, \quad (n \geq 1)\,, \end{cases}$$

il est établi dans [3] la forme explicite de cette suite via les coefficients bi^{s}nomiaux donnée par (10).

Avec les coefficients p, q-bi^{s}nomiaux on construit un p, q-analogue du triangle de Pascal généralisé, en s'inspirant de la forme explicite de la suite de Fibonacci généralisée via les coefficients bi^{s}nomiaux, on définit la suite p, q-Fbonacci généralisée par la somme le long de la diagonale principale sur le triangle associé au coefficients p, q-bi^{s}nomiaux.

Définition 2 *Pour $s \geq 1$, on définit comme p, q-analogue de la suite "multibonacci" la suite de polynômes définie, pour $n \geq 0$, par*

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x, y, p, q) := \sum_{k=0}^{sm-r} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} (px)^{sn-(s+1)k} (qy)^k\,,$$

où $0 \leq r \leq s$ et $m(s+1) - r = n$.

Avec le cas particulier $s = 1$ et $p = 1$, on retrouve l'approche de Cigler pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci

$$\mathbf{F}_{n+1}(x, y) = \mathbf{F}_{n+1}^{(1)}(x, y, 1, q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{s-2k} y^k.$$

Cigler [7] introduit son approche d'une manière combinatoire et montre les deux récurrences

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}(x,y) &= x\mathbf{F}_n(x,y)+q^{n-1}y\mathbf{F}_{n-1}(x,y/q), &(11)\\ \mathbf{F}_{n+1}(x,y) &= x\mathbf{F}_n(x,qy)+qy\mathbf{F}_{n-1}(x,qy). &(12)\end{aligned}$$

Ces deux récurrences sont un cas particulier du théorème suivant.

Théorème 5 *Le p,q-analogue de la suite "multibonacci" vérifie, pour $n \geq 0$, les relations de récurrence*

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y,p,q) &= \sum_{j=0}^{s}\left(p^{n-j}x\right)^{s-j}\left(q^{n-j}y\right)^{j}\mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(x,\frac{y}{p^{s-j}q^{j}},p,p\right),\\ \mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y,p,q) &= \sum_{j=0}^{s}(px)^{s-j}(qy)^{j}\mathbf{F}_{n-j}^{(s)}(px,qy,p,q).\end{aligned}$$

Preuve. Avec les récurrences (8) et (9) on a

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y,p,q) &= \sum_{k=0}^{sm-r}\left(\sum_{j=0}^{s}p^{(n-k-1)(s-j)}q^{(n-k-1)j}\begin{bmatrix}n-1-k\\k-j\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}\right)(px)^{sn-(s+1)k}(qy)^{k},\\ \mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y,p,q) &= \sum_{k=0}^{sm-r}\left(\sum_{j=0}^{s}p^{(n-k-1)s-k+j}q^{k-j}\begin{bmatrix}n-1-k\\k-j\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}\right)(px)^{sn-(s+1)k}(qy)^{k}.\end{aligned}$$

En changeant l'indice de sommation k par $k+j$, les deux seconds membres des égalités ci-dessus donnent respectivement

$$\sum_{j=0}^{s}\sum_{k=0}^{sm-r}p^{(n-k-j-1)(s-j)}q^{(n-k-j-1)j}\begin{bmatrix}n-1-k-j\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{sn-(s+1)(k+j)}(qy)^{k+j},$$

$$\sum_{j=0}^{s}\sum_{k=0}^{sm-r}p^{(n-k-j-1)s-k}q^{k}\begin{bmatrix}n-1-k-j\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{sn-(s+1)(k+j)}(qy)^{k+j},$$

ou encore respectivement

$$\sum_{j=0}^{s}\left(p^{n-j}x\right)^{s-j}\left(q^{n-j}y\right)^{j}\sum_{k=0}^{sm-r}p^{-(s-j)k}q^{-kj}\begin{bmatrix}n-1-k-j\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{s(n-1-j)-(s+1)k}(qy)^{k},$$

$$\sum_{j=0}^{s}(px)^{s-j}(qy)^{j}\sum_{k=0}^{sm-r}p^{(n-k-j-1)s-k}q^{k}\begin{bmatrix}n-1-k-j\\k\end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{s(n-1-j)-(s+1)k}(qy)^{k}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y,p,q) &= \sum_{j=0}^{s}\left(p^{n-j}x\right)^{s-j}\left(q^{n-j}y\right)^{j}\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}\left(x,\frac{y}{p^{s-j}q^{j}},p,q\right),\\ \mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y,p,q) &= \sum_{j=0}^{s}(px)^{s-j}(qy)^{j}\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(px,qy,p,q).\end{aligned}$$

■

Pour $s=1$, la suite de polynômes $\left(\mathbf{F}_n^{(1)}(x,y,p,q)\right)_{n\geq 0}$ représente l'approche de Cigler pour le p,q-analogue de la suite de Fibonacci puisque elle donne l'approche de Cigler pour le q-analogue de la suite de Fibonacci dans le cas particulier $p=1$. La forme explicite de ces polynômes via les coefficients p,q-binomiaux est donnée par

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(1)}(x,y,p,q)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n+1-2k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-2k} y^k.$$

3.2 Le p,q-analogue de la suite r-Fibonacci

Pour un entier non nul r, les polynômes r-Fibonacci sont donnée par

$$U_{n+1}^{[r]}(x,y)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tbinom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k.$$

Par analogie on propose :

Définition 3 *Pour $r\geq 1$, le p,q-analogue de la suite r-Fibonacci est défini par :*

$$\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}(x,y,p,q)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k} y^k. \tag{13}$$

Dans le prochain résultat, on montre que le p,q-analogue de la suite r-Fibonacci vérifie deux récurrences de sorte que les récurrences (11) et (12) deviennent un cas particulier.

Théorème 6 *Les polynômes $\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,p,q)$ vérifient les deux récurrences suivantes*

$$\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}(x,y,p,q) = px\mathbf{F}_n^{[r]}(px,py,p,q)+qy\mathbf{F}_{n-r}^{[r]}(qx,qy,p,q), \tag{14}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}(x,y,p,q) = px\mathbf{F}_n^{[r]}(px,qy,p,q)+qy\mathbf{F}_{n-r}^{[r]}(px,qy,p,q), \tag{15}$$

avec $\mathbf{F}_0^{[r]}(x,y,p,q)=0$, $\mathbf{F}_j^{[r]}(x,y,p,q)=x^{j-1}$ pour $j=1,2,...,r$.

Preuve. D'après la relation (2), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}\left(x,y,p,q\right)\\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\left(p^{k}\begin{bmatrix}n-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}+q^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix}n-1-rk\\k-1\end{bmatrix}_{p,q}\right)x^{n-(r+1)k}y^{k}\\
=&\ px\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}\left(px\right)^{n-1-(r+1)k}\left(qy\right)^{k}+\\
&y\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)(k+1)}{2}}q^{\binom{k+2}{2}}q^{n-(r+1)(k+1)}\begin{bmatrix}n-r-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}x^{n-r-1-(r+1)k}\left(qy\right)^{k}\\
=&\ px\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}x^{n-1-(r+1)k}y^{k}+\\
&qy\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-r-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}\left(qx\right)^{n-r-1-(r+1)k}\left(qy\right)^{k}\\
=&\ px\mathbf{F}_{n}^{[r]}\left(px,py,p,q\right)+qy\mathbf{F}_{n-r}^{[r]}\left(qx,qy,p,q\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}\left(x,y,p,q\right)\\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k+1}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\left(q^{k}\begin{bmatrix}n-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}+p^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix}n-1-rk\\k-1\end{bmatrix}_{p,q}\right)x^{n-(r+1)k}y^{k}\\
=&\ px\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}\left(px\right)^{n-1-(r+1)k}\left(qy\right)^{k}+\\
&y\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)(k+1)+1}{2}}q^{\binom{k+2}{2}}p^{n-(r+1)(k+1)}\begin{bmatrix}n-r-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}x^{n-r-1-(r+1)k}y^{k}\\
=&\ px\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}\left(px\right)^{n-1-(r+1)k}\left(qy\right)^{k}+\\
&qy\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-r-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}\left(px\right)^{n-r-1-(r+1)k}\left(qy\right)^{k}\\
=&\ px\mathbf{F}_{n}^{[r]}\left(px,qy,p,q\right)+qy\mathbf{F}_{n-r}^{[r]}\left(px,qy,p,q\right).
\end{aligned}$$

■

Notons que les récurrences (11) et (12) peuvent être écrites comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}\left(x,y\right) &= x\mathbf{F}_{n}\left(x,y\right)+qy\mathbf{F}_{n-1}\left(qx,qy\right),\\
\mathbf{F}_{n+1}\left(x,y\right) &= x\mathbf{F}_{n}\left(x,qy\right)+qy\mathbf{F}_{n-1}\left(x,qy\right),
\end{aligned}$$

ce qui montre qu'elles sont données par le Théorème précédent avec le cas particulier $r=1$ et $p=1$.

3.3 La suite p,q-Lucas

La suite p,q-Fibonacci vérifie deux relations de récurrence. Par rapport à chacune de ces récurrences on définit un p,q-analogue de la suite de Lucas. Ainsi on obtient deux espèces de suite p,q-Lucas.

Définition 4 *La suite p,q-Lucas de première espèce et la suite p,q-Lucas de deuxième espèce sont définies respectivement par*

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_n^{[r]}(x,y,p,q) &: = 2\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{q},p,q\right) - x\mathbf{F}_n^{[r]}(x,y,p,q),\\
\mathbb{L}_n^{[r]}(x,y,p,q) &: = 2\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p},p,q\right) - x\mathbf{F}_n^{[r]}(x,y,p,q).
\end{aligned}$$

En remplaçant les récurrences (14) et (15) dans cette définition, on obtient les identités

$$\mathbf{L}_n^{[r]}(x,y,p,q) = \mathbf{F}_{n+1}^{[r]}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{q},p,q\right) + y\mathbf{F}_{n-r}^{[r]}(x,y,p,q), \tag{16}$$

$$\mathbb{L}_n^{[r]}(x,y,p,q) = \mathbf{F}_{n+1}^{[r]}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p},p,q\right) + \frac{q}{p}y\mathbf{F}_{n-r}^{[r]}\left(\frac{q}{p}x,\frac{q}{p}y,p,q\right), \tag{17}$$

par suite, l'usage de la forme explicite des polynômes $\mathbf{F}_n^{[r]}(x,y,p,q)$ donnée par la relation (13) nous conduit à la forme explicite des polynômes p,q-Lucas via les coefficients p,q-binomiaux qui est donnée par le théorème suivant

Théorème 7 *La suite p,q-Lucas de première espèce et la suite p,q-Lucas de deuxième espèce admettent respectivement les expressions :*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_n^{[r]}(x,y,p,q)\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \left(1 + p^{n-(r+1)k}\frac{[k]_q}{[n-rk]_q}\right) x^{n-(r+1)k} y^k,\\
&\mathbb{L}_n^{[r]}(x,y,p,q)\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \left(p^{-k} + q^{n-(r+1)k}\frac{[k]_q}{[n-rk]_q}\right) x^{n-(r+1)k} y^k.
\end{aligned}$$

Preuve. De la relation (13), on tire les expressions

$$\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{q},p,q\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k} y^k, \tag{18}$$

$$y\mathbf{F}_{n-r}^{[r]}(x,y,p,q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \frac{[k]_{p,q}}{[n-rk]_{p,q}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k} y^k, \tag{19}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p},p,q\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}-k} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k} y^k, \tag{20}$$

$$\frac{q}{p}y\mathbf{F}_{n-r}^{[r]}\left(\frac{q}{p}x,\frac{q}{p}y,p,q\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}-k} q^{\binom{k+1}{2}+n-(r+1)k} \frac{[k]_{p,q}}{[n-rk]_{p,q}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k} y^k. \tag{21}$$

Pour aboutir au résultat, il suffit de remplacer (18) et (19) dans (16) et de remplacer (20) et (21) dans (17) ■

Pour $r = p = 1$, on retrouve les deux espèces de suites q-Lucas qu'on a associée à l'approche de Cigler dans [4] où on montre des relations duales entre les suites q-Fibonacci et q-Lucas et d'autres identités sommatoires. Avec cette définition on peut déduire des identités analogues et de type (16) et (17) vérifiés par la suite p,q-Fibonacci et la suite p,q-Lucas. Cependant on se restreint au résultat suivant.

Théorème 8 *La suite p,q-Lucas de première espèce et la suite p,q-Lucas de deuxième espèce satisfont respectivement les récurrences*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{n+1}^{[r]}(x,y,p,q) &= px\mathbf{L}_{n}^{[r]}(px,py,p,q) + qy\mathbf{L}_{n-r}^{[r]}(qx,qy,p,q), \\ \mathbb{L}_{n+1}^{[r]}(x,y,p,q) &= px\mathbb{L}_{n}^{[r]}(px,qy,p,q) + qy\mathbb{L}_{n-r}^{[r]}(px,qy,p,q). \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de remarquer que la suite $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}(x/p,y/q,p,q)\right)_{n\geq 0}$ satisfait une récurrence de type (14) et la suite $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{[r]}(x/p,y/p,p,q)\right)_{n\geq 0}$ satisfait une récurrence de type (15). ■

3.4 Conclusion

Le cas particulier $s = 1$ pour le p,q-analogue de la suite multibonacci et le cas particulier $r = 1$ pour le p,q-analogue de la suite r-Fibonacci coïncident et donnent l'approche de

Cigler pour le q-analogue de la suite de Fibonacci dans le cas où $p = 1$, par conséquent on considère le p, q-analogue des suites de Fibonacci généralisées présenté dans ce papier est lié à l'approche de Cigler. D'autre part il est intéressant d'étendre l'approche de Carlitz pour le q-analogue de la suite de Fibonacci.

Références

[1] George E. Andrews and R. J. Baxter. Lattice gas generalization of the hard hexagon model. III. q-trinomial coefficients. *J. Statist. Phys.*, 47(3-4) :297–330, 1987. ISSN 0022-4715. doi : 10.1007/BF01007513. URL `http://dx.doi.org/10.1007/BF01007513`.

[2] H. Belbachir. Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques. Thèse Doctorat d'Etat. U.S.T.H.B, 2008.

[3] Hacène Belbachir and Farid Bencherif. Linear recurrent sequences and powers of a square matrix. *Integers*, 6 :A12, 17, 2006. ISSN 1867-0652.

[4] Hacène Belbachir and Athmane Benmezai. An alternative approach to Cigler's q-Lucas polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 226 :691–698, 2014. ISSN 0096-3003. doi : 10.1016/j.amc.2013.10.009. URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.009`.

[5] Hacène Belbachir and Athmane Benmezai. A q-analogue for bi^{s}nomial coefficients and generalized Fibonacci sequences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **352** (3) :167–171, 2014. ISSN 1631-073X. doi : 10.1016/j.crma.2014.01.009. URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.01.009`.

[6] Richard C. Bollinger. A note on Pascal-T triangles, multinomial coefficients, and Pascal pyramids. *Fibonacci Quart.*, 24(2) :140–144, 1986. ISSN 0015-0517.

[7] Johann Cigler. A new class of q-Fibonacci polynomials. *Electron. J. Combin.*, 10 :Research Paper 19, 15 pp. (electronic), 2003. ISSN 1077-8926. URL `http://www.combinatorics.org/Volume_10/Abstracts/v10i1r19.html`.

[8] Roberto B. Corcino. On p, q-binomial coefficients. *Integers*, 8 :A29, 16, 2008. ISSN 1867-0652.

[9] George Gasper and Mizan Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 96 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. ISBN 0-521-83357-4. doi : 10.1017/CBO9780511526251. URL `http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511526251`. With a foreword by Richard Askey.

[10] Ch. Kassel. Quantum groups. In *Algebra and operator theory (Tashkent, 1997)*, pages 213–236. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[11] Claudia Smith and Verner E. Hoggatt, Jr. Generating functions of central values in generalized Pascal triangles. *Fibonacci Quart.*, 17(1) :58–67, 1979. ISSN 0015-0517.